תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

27 באפריל 2017

בשיעור שעבר התבוננו במסילות שתומנתן מוכלת בקבוצה פתוחה. הגדרנו חלוקה עם כיסוי קמור של המסילה, והשתמשנו בו ובמה שהוכחנו על פונקציות גזירות בתחום קמור כדי להגדיר את האינטגרל לאורך המסילה. ההגדרה שנתנו לא תלוייה באף בחירה שביצענו. דרך נוספת לראות זאת היא להגדיר מסילה פוליגונלית, שקודקודיה על תמונת המסילה, כקירוב קמור - כל קטע מוכל בתחום קמור שבו יש למסילה קדומה. אז רואים שהאינטגרל במובן הזה זהה לזה שהגדרנו ראשית על מסילות פוליגונליות - ולא תלוי בבחירת הקירוב הפוליגונלי.

טענה 0.1 תהי U פתוחה, α מסילה בתוך U. אזי קיים $L = L(\alpha, U)$ כך שלכל α גזירה על U המקיימת $|f| \leq M$ על U מתקיים

$$\left| \int_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq M \cdot L$$

הוכחה: ניקח קירוב פוליגונלי קמור P של α שמוכל בתוך U. נגדיר את L להיות האורך של P. נשתמש בכך שמתקיים

$$\int_{\alpha} f = \int_{P} f$$

ובהערכה הסטנדרטית על אינטגרל לאורך P. ■

הגדרה 0.2 בהינתן שתי מסילות $\alpha, \beta : [a,b] \to U$ מגדירים

$$||\alpha - \beta|| = \max_{t \in [a,b]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

משפט 0.3 תהי U פתוחה, α מסילה סגורה בתוך U. אזי קיים $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, U) > 0$ כך שלכל מסילה סגורה β עם $||\alpha - \beta|| < \varepsilon$ ולכל פונקציה f שגזירה על U מתקיים

$$\int_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\beta} f(z)\, \mathrm{d}z$$

הוכחה: תהי (t_i, U_j) חלוקה עם כיסוי קמור של α. נגדיר את ε להיות כזה שאם $||\alpha-\beta|| < \varepsilon$ אזי $\{t_i, U_j\}$ מהווה גם חלוקה עם כיסוי קמור של β. כלומר לכל i מתקיים $\beta([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_j$לאותו j המתאים לאינדקס i עבור α. ברור שקיים $\varepsilon > 0$ כזה כי לכל i נוכל להגדיר

$$0 < \varepsilon_i = \operatorname{dist}\left(\alpha\left[t_i, t_{i+1}\right], U_{j(i)}^c\right)$$

ואז לקחת מינימום. נרצה להוכיח כעת שלכל f גזירה על U האינטגרלים שווים על α, β, כאשר $||\alpha-\beta|| < \varepsilon$. נחשב:

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\ \mathrm{d}z - \int\limits_{\beta} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_i \left(F_j\left(\alpha\left(t_{i+1}\right)\right) - F_j\left(\beta\left(t_{i+1}\right)\right)\right) - \left(F_j\left(\alpha\left(t_i\right)\right) - F_j\left(\beta\left(t_i\right)\right)\right)$$

זהו טור טלסקופי שהאיבר האחרון שלו זהה לראשון, כי המסילה סגורה. F_j שמופיעות בסכום משתנות אמנם כאשר i עולה, אבל החיתוך של שתי קבוצות קמורות הוא קמור, ולכן קשיר - לכן על החיתוך אותם F_j נבדלים בקבוע, שלא משנה כמובן את חישוב ההפרש. ■

הגדרה 0.4 תהי $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $\alpha, \beta : [a,b] \to U$ מסילות סגורות. <u>הומוטופיה</u> בין המסילות α, β בתוך U הינה פונקציה $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ רציפה בשני המשתנים, כך שמתקיים:

1. לכל $s \in [0,1]$ מתקיים
$$H(a,s) = H(b,s)$$
כלומר המסולה $H(t,s) = \gamma_s(t)$ היא סגורה.
2. מתקיים $\gamma_0 = \alpha$, כלומר
$$H(t,0) = \alpha(t)$$
3. מתקיים $\gamma_1 = \beta$, כלומר
$$H(t,1) = \beta(t)$$

אם קיימת הומוטופיה בין α, β, נאמר כי הן הומוטופיות או שקולות (קל לראות שזה אכן יחס שקילות). אם α הומוטופית למסילה הקבועה אומרים כי α <u>כוויצה</u>.

דוגמה עבור $U = \mathbb{C}$, כל מסילה הוא כוויצה.

הוכחה: נכווץ את α אל 0 למשל על ידי

$$H(t,s) = \alpha(t)(1-s)$$

והוכחה דומה עובדת בכל U קמור. ■

דוגמא מסילות המעגל $e^{2\pi it}$, $\frac{1}{2}e^{2\pi it}$ הומוטופיות בתחום בקבוצה $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

משפט 0.5 תהי f גזירה על U ונניח כי α,β מסילות סגורות שהן הומוטופיות בתוך U. אזי

$$\int_{\alpha} f = \int_{\beta} f$$

הוכחה: תהי $H\left(t,s\right)$ הומוטופיה בין α,β. נסמן $\gamma_s = H\left(\cdot,s\right)$ מסילה סגורה. נגדיר

$$\varphi\left(s\right) = \int_{\gamma_s} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

המשפט הקודם מבטיח כי $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ קבועה מקומית. מדוע היא קבועה מקומית? בזכות הרציפות של H. בהינתן s_0 קיים δ כך שאם $|s-s_0|<\delta$ אזי $||\alpha_s-\alpha_{s_0}||<\varepsilon$, כאשר $\varepsilon>0$ שמתאים לערך s_0 במשפט הקודם. לפי המשפט הקודם זה מבטיח

$$\int_{\gamma_s} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{s_0}} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

לכן $\varphi\left(x\right)$ קבועה מקומית בכל נקודה - ולכן קבועה. בפרט $\varphi\left(1\right)=\varphi\left(0\right)$, שזה מה שרצינו להראות. ■

מסקנה 0.6 (משפט קושי למסילות כוויצות) אם f גזירה על U, α מסילה סגורה כוויצה בתוך U, אזי

$$\int_{\alpha} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

0.1 אינדקס של מסילה סגורה סביב נקודה

הגדרה 0.7 בהנתן מסילה סגורה α ונקודה $z_0 \notin \mathrm{Im}\alpha$, תמיד קיימת בחירה רציפה של $\varphi\left(t\right)=\arg\left(\alpha\left(t\right)-z_0\right)$, ואז מגדירים

$$\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z_0\right) = \frac{\varphi\left(b\right)-\varphi\left(a\right)}{2\pi}$$

אם בוחרים ψ רציפה אחרת במקום φ, אזי $\varphi-\psi$ רציפה ומקבלת ערכים מתוך $\{2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ - משמע היא קבועה (רציפה עם תמונה בת מניה). לכן, $\psi\left(b\right)-\psi\left(a\right)=\varphi\left(b\right)-\varphi\left(a\right)$, ולכן ההגדרה טובה ולא תלויה בבחירה.

יש דרך טבעית לראות את האינדקס תוך שימוש באינטגרל. לשם פשטות נניח $z_0 = 0$. תהי $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$. נבחר שרירותית ערך של $\log\alpha(a)$ ונגדיר

$$l(t) = \log\alpha(a) + \int\limits_{\alpha[a,t]} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

אזי $l(t)$ היא בחירה רציפה של $\log\alpha(t)$. נראה למה זה נכון בסביבה "קטנה" של a: שם ניתן לבחור באופן רציף את $\arg$ ולהגדיר את $\log$, שתהיה קדומה של $\frac{1}{z}$, ואז

$$l(t) = \log\alpha(a) + \int\limits_{\alpha[a,t]} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \log(\alpha(a)) + \log(\alpha(t)) - \log(\alpha(a)) = \log(\alpha(t))$$

בדיוק באותו אופן, רואים שאם השוויון נכון בנקודה t_0 כלשהי, אז הוא נכון גם בסביבה קטנה שלה. לכן נקבל שהוא נכון על כל המסילה.
נזכור שבחירה רציפה של $\log(\alpha(t))$נותנת בחירה רציפה של $\arg(\alpha(t))$ על ידי הטלה לחלק המרוכב. מכאן נקבל הגדרה לאינדקס:

$$\mathrm{Ind}_\alpha(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

כי $\frac{l(b)-l(a)}{2\pi i} = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi}$ כאשר φ בחירה רציפה של $\arg(\alpha(t))$.
נשים לב שאם $l(t)$ היא בחירה רציפה של $\log(\alpha(t))$, אז $l(t)$ נותנת הרמה של מסילה מתוך $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אל $\mathbb{C}$ - ואז נקודת הסיום של ההרמה פחות נקודת הסיום חלקי 2π נותן את האינדקס. הפונקציה $z \mapsto \exp(z)$ היא "העתקת כיסוי" שהיא ההפוכה להרמה הזו.

מסקנה 0.8 אם $\mathrm{Ind}_\alpha(0)$, אזי α כוויצה. הכיוון ההפוך ברור.