תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

23 באפריל 2017

1 תורת אינטגרציה של פונקציות גזירות על מסילות כלליות

הגדרה 1.1 מסילה היא פונקציה רציפה $\alpha : [a,b] \to U$, כאשר $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

הגדרה 1.2 <u>חלוקה עם כיסוי קמור</u> של מסילה α, עם $\mathrm{Im}\alpha \subseteq U$, היא:

1. בחירה של כמות סופית של ק בוצות קמורות $U_j \subseteq U$ כך שמתקיים $\mathrm{Im}\alpha \subseteq \bigcup U_j$.
2. חלוקה של הקטע $[a,b]$: $\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$, כך שלכל i קיים j עבורו $\alpha\left([t_i, t_{i+1}]\right) \subseteq U_j$.

נשים לב שלכל מסילה α קיימת חלוקה עם כיסוי קמור: ניקח $0 < \delta < \mathrm{dist}\left(\mathrm{Im}\alpha, U^c\right)$. מרציפות במידה שווה של α, קיים n עבורו אם $|t-s| \leq \frac{1}{n}$ אזי $|\alpha(t) - \alpha(s)| < \delta$. כעת, בלי הגבלת הכלליות, $[a,b] = [0,1]$, וניקח $t_i = \frac{i}{n}$. נגדיר $U_j = B_\delta\left(\alpha\left(t_j\right)\right)$. מיידי לבדוק שזה מקיים את התכונות.

הגדרה 1.3 בהנתן f גזירה בתוך U, α מסילה עם $\mathrm{Im}\alpha \subseteq U$, וחלוקה עם כיסוי קמור של α, $\{U_j, t_i\}$, נגדיר את <u>האינטגרל</u> של f לאורך α:

$$\int_\alpha f \,\mathrm{d}z := \sum_{i=0}^{n-1} F_{j(i)}\left(\alpha\left(t_{i+1}\right)\right) - F_{j(i)}\left(\alpha\left(t_i\right)\right)$$

כאשר F_j הנה פונקציה קדומה כלשהיא של f על $U_{j(i)}$ עבורו $\alpha\left([t_i, t_{i+1}]\right) \subseteq U_{j(i)}$.

דוגמא ניקח $f = \frac{1}{z}$, α שהיא מעגל סביב 0. $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ניקח ארבע נקודות, כל אחת ברביע אחר. בתור הקבוצות הקמורות ניקח חצאי מישור - העליון, התחתון, הימני והשמאלי. כך הסכום שלעיל למעשה יהפוך לחישוב האינטגרל על מסילה ריבועית סביב 0, שאותו כבר חישבנו - $2\pi i$.

כדי להראות שהגדרת האינטגרל תלויה רק במסילה α, ולא בבחירת החלוקה עם הכיסוי הקמור, מסתכלים על מושג ההעדנה של חלוקה.

הגדרה 1.4 יהיו $\sigma = \{t_i, U_j\}$, $\pi = \{s_k, V_m\}$ שתי חלוקות עם כיסוי קמור של המסילה α, כאשר $\mathrm{Im}\alpha \subseteq U$. נאמר כי π היא העדנה של α, ונסמן $\sigma \prec \pi$, אם לכל m קיים j עבורו $V_m \subseteq U_j$, וכן $\{s_k\}$ חלוקה של $[a,b]$ שמעדנת את $\{t_i\}$.

טענה 1.5 1. אם $\sigma \prec \pi$ אזי חישוב האינטגרל של f על α לפי σ נותן את אותה תוצאה כמו החישוב לפי π.

2. לכל שתי חלוקות σ, τ עם כיסוי קמור של α, קיימת העדנה משותפת π.

הוכחה:

1. מסיק להוכיח את הטענה הזו בסיטואציה של $[t_i, t_{i+1}]$, כאשר $t_i = s_{i,1} < \cdots < s_{i,l} = t_{i+1}$. לכל i, מתקיים

$$\alpha\left([t_i, t_{i+1}]\right) \subseteq W$$

כאשר W קמורה. לכן, ניתן לבחור בה פונקציה קדומה F של f, שתשמש אותנו בחישוב בכל הקטעים $[s_{i,k}, s_{i,k+1}]$. כעת השוויון הרצוי הופך להיות פשוט טור טלסקופי סופי.

2. מביטים בחיתוכים של הקבוצות הקמורות, והעדנה משותפת של החלוקות של הקטע.

■

הגדרה 1.6 עבור מסילה α וחלוקה עם כיסוי קמור שלה, מקבלים מסילה P פוליגונאלית, שקודקודיה הם $\{\alpha(t_i)\}$, כך שלכל פונקציה f גזירה, מתקיים

$$\int_{\alpha} f \, \mathrm{d}z = \int_{P} f \, \mathrm{d}z$$

כאשר האינטגרל על P הוא במובן שלמדנו בעבר. P כזו נקראת מסילה <u>מקרבת</u> את α.