תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

20 באפריל 2017

בשיעור האחרון הגדרנו את מושג האינטגרל על קטע במישור המרוכב. ראינו כל מיני תכונות בסיסיות, ונשארה לנו אחת להוכיח:

טענה 0.1 נניח $f=F'$ על U, $[w_1,w_2]\subseteq U$. אזי

$$\int\limits_{[w_1,w_2]} f(z)\ \mathrm{d}z = F(w_2)-F(w_1)$$

הוכחה: בתרגיל הבית ראינו

$$\int\limits_{[w_1,w_2]} f(z)\ \mathrm{d}z = (w_2-w_1)\int\limits_0^1 f((1-t)w_1+tw_2)\ \mathrm{d}t$$

כעת נוכל להגדיר

$$\alpha(t)=(1-t)w_1+tw_2$$

ואז $\alpha'(t)=w_2-w_1$, כלומר

$$\int\limits_{[w_1,w_2]} f(z)\ \mathrm{d}z = (w_2-w_1)\int\limits_0^1 f((1-t)w_1+tw_2)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 F'(\alpha(t))\,\alpha'(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 (F(\alpha(t)))'\ \mathrm{d}t = F(\alpha(1))-F(\alpha(0)) = F(w_2)-F(w_1)$$

■

מסקנה 0.2 אם $\alpha=[w_1,\ldots,w_n,w_1]$ מסילה פוליגונאלית סגורה, $f=F'$, אזי

$$\int\limits_\alpha f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

נרצה כעת לתת מעין משפט הפוך.

משפט 0.3 נניח U קמור ומתקיים שלכל מסילת משולש $\triangle$ מתקיים

$$\int\limits_{\triangle} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

אזי קיימת F גזירה על U המקיימת $F' = f$.

הוכחה: נקבע w_0 בתוך U ונגדיר

$$F(w) = \int\limits_{[w_0,w]} f(z)\, \mathrm{d}z$$

נטען כי זו גזירה וכן $F' = f$. כלומר, נרצה לטעון כי:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(w+h) - F(w)}{h} = f(w)$$

מההנחה ידוע כי אם נסמן $\gamma = [w_0, w_1, w_1 + h, w_0]$, אזי

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

ומכאן נקבל כי

$$F(w+h) - F(w) = \int\limits_{w}^{w+h} f(z)\, \mathrm{d}z$$

לכן

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} - f(w) = \frac{1}{h} \int\limits_{w}^{w+h} f(z)\, \mathrm{d}z - f(w) = \frac{1}{h} \int\limits_{w}^{w+h} (f(z) - f(w))\, \mathrm{d}w$$

נרצה לטעון כי הביטוי האחרון שואף לאפס כאשר $h \to 0$. אכן, בהינתן $\varepsilon > 0$, הרציפות של f בנקודה w נותנת לנו $\delta > 0$ שעבורו אם $|h| < \delta$ אזי

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

כעת נוכל להשתמש בחסימת האינטגרל דרך חסם על הפונקציה ועל אורך הקטע, ולקבל שהאינטגרל האחרון חסום על ידי $\left|\frac{1}{h}\right| |\varepsilon| |h| = \varepsilon$, כלומר הוא שואף לאפס כאשר $h \to 0$. ■

תוספת (חשובה) נניח שאנו בתנאי המשפט הקודם, אלא שעתה קיימת נקודה $p \in U$ שבה f לא מוגדרת (התנאי על האינטגרלים נכון כל עוד הקטעים לא מכילים את p). אזי אותה מסקנה מתקיימת - יש F עם $F = f'$ על $U \setminus \{p\}$.

הוכחה: נבחר נקודת בסיס נוספת w_1 כך שהנקודות w_0, w_1, p אינן על ישר אחד. עבור כל w שאינו על הישר החבר את w_0 או w_1 עם p, מתקיים שאם $\triangle$ היא המשולש w_0, w_1, w אזי

$$\int\limits_{\triangle} f = 0$$

מההנחה, ולכן

$$\underbrace{\int\limits_{w_0}^{w} f}_{F_0(w)} - \underbrace{\int\limits_{w_1}^{w} f}_{F_1(w)} = \int\limits_{w_0}^{w_1} f = C$$

כאשר C קבוע שלא תלוי בנקודה w. לכל נקודה שאינה בעייתית עם w_0 או w_1, מתקיים

$$F_0\left(w\right) = F_1\left(w\right) + c$$

כל אחד משני האגפים כאן הוא פונקציה קדומה של f. נשתמש באגף שמאל לנקודות שאינן על הישר שבין w_0, p, ובאגף ימין עבור נקודות שאינן על הישר בין w_1, p. ■

הנחת הקמירות שיחקה תפקיד חשוב בהוכחה. מה קורה אם היא לא מתקיימת?

משפט 0.4 יהי U תחום כללי, ותהי f רציפה על U. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת F עבורה $F' = f$ על U.
2. לכל מסילה פוליגונלית סגורה α מתקיים

$$\int\limits_{\alpha} f\left(z\right)\, \mathrm{d}z = 0$$

נשאיר את המשפט הזה כתרגיל.

משפט 0.5 (גורסה) נניח כי U תחום, f גזירה על U, Δ משולש שהוא והפנים שלו מוכלים בתוך U. אזי

$$\int\limits_{\Delta} f\left(z\right)\, \mathrm{d}z = 0$$

הוכחה: נסמן בנתונים הללו

$$\left|\int\limits_{\Delta} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right| = a$$

ונרצה להראות $a = 0$. נסמן l את היקף המשולש, r את קוטר המשולש (המרחק המקסימלי בין שתי נקודות עליו). נניח שהאוריינטציה של המסילה היא נגד כיוון השעון (משנה רק בפקטור של מינוס 1).

כעת, נסמן במשולש את אמצעי הצלעות, ונחבר אותם. כך יצרנו 4 משולשים קטנים יותר, Δ^i, כאשר $1 \le i \le 4$. נשמור עליהן את האוריינטציה נגד כיוון השעון. נשים לב שמתקיים

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4} \Delta^i$$

במובן שלכל פונקציה רציפה f מתקיים

$$\int\limits_{\Delta} f = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\Delta^i} f$$

(נשתמש בסימון הזה של סכום של מסילות גם בעתיד). מאי שוויון המשולש, קיים i עבורו מתקיים

$$\left|\int\limits_{\Delta^i} f\right| \ge \frac{a}{4}$$

במשולש הזה, שנסמנו Δ_1, הערכים l, r קטנו פי 2. נמשיך כך ונקבל סדרת משולשים Δ_n, שלהם היקף $l_n = \frac{l}{2^n}$, וקוטר $r_n = \frac{r}{2^n}$. כמו כן

$$\left|\int\limits_{\Delta_n} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right| \ge \frac{a}{4^n}$$

מקומפקטיות, חיתוך המשולשים אינו ריק, ומכיוון שהקוטר הולך לאפס נובע שהחיתוך הוא בדיוק נקודה אחת. נסמן אותה z_0.

יהי $\varepsilon > 0$. נראה כי

$$a < \varepsilon l r$$

ומהבחירה השרירותית של ε נקבל $a = 0$, ונסיים. f גזירה בנקודה z_0, ולכן נכול לכתוב

$$f\left(z\right) = f\left(z_0\right) + f'\left(z_0\right)\left(z - z_0\right) + o\left(z - z_0\right)$$

כעת, ניקח n גדול מספיק כך שבתוך Δ_n, מתקיים

$$|o(z-z_0)| < \varepsilon |z-z_0|$$

כעת, נבצע אינטגרציה לשוויון שלעיל:

$$\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \overbrace{\int\limits_{\Delta_n} f(z_0)\,\mathrm{d}z}^{0} + \overbrace{\int\limits_{\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,\mathrm{d}z}^{0} + \int\limits_{\Delta_n} o(z-z_0)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{\Delta_n} o(z-z_0)\,\mathrm{d}z$$

$$\frac{a}{4^n} \le \left|\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_{\Delta_n} o(z-z_0)\,\mathrm{d}z\right| < l_n \varepsilon r_n = \frac{\varepsilon l r}{4^n}$$

$$a < \varepsilon l r$$

וסיימנו. ■

תוספת (חשובה) נניח שבהינתן ההנחות כמו במשפט, קיימת $p \in U$ שבה f אינה מוגדרת. נרצה לדעת תחת איזו הנחה נוכל עדיין להסיק כי לכל משולש שמוכל עם הפנים שלו בתוך U מתקיים

$$\int\limits_{\Delta} f = 0$$

נשים משולש שווה צלעות קטן כרצוננו שמרכזו בנקודה p, ומחלקים את המשולש הגדול לתתי משולשים לפי הקודקודים הללו. מקבלים שכדי להוכיח את התאפסות האינטגרל, די לדעת שעבור משולשים Δ_n שווי צלעות שמרכזם p, מתקיים

$$\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$$

כי על שאר המשולשים ההתאפסות מובטחת מהמשפט הקודם. נוכל להעריך:

$$\left|\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le L(\Delta_n) \max_{z\in\Delta_n} f$$

נרצה שאגף ימין ישאף לאפס, וזה שקול לכך שמתקיים

$$|f(z)(z-p)| \xrightarrow{z\to p} 0$$

לכן, זהו התנאי שאנחנו צריכים כדי שהאינטגרל על משולש יתאפס. מכאן נקבל גם כי קיימת קדומה F של f.