תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

2 באפריל 2017

1 אינטגרציה

1.1 אינטגרציה על קטעים במישור המרוכב

בהינתן $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{C}$ נסמתן בתור $[w_1, w_2]$ את הקטע המחבר ביניהן (כשהכיוון מהנקודה w_1 אל w_2). פורמלית:

$$[w_1, w_2] = \{(1-t)\, w_1 + t w_2 \mid t \in [0,1]\}$$

לכל פונקציה רציפה f על הקטע, נגדיר את האינטגרל

$$\int_{w_1}^{w_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

באופן זהה לזה שבו הגדרנו את אינטגרל רימן על הישר הממשי. לכל חלוקה של הקטע, $\{z_i\}$, כאשר $w_1 \leq z_i < z_{i+1} \leq w_2$ (הסידור כאן הוא לפי הסידור על הקטע) ולכל בחירה של נציגים $p_i \in [z_i, z_{i+1}]$ מגדירים

$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$$

ואת סכום רימן המתאים:

$$S(f, \{z_i, p_i\}) = \sum f(p_i)\, \Delta z_i$$

לכל חלוקה, נגדיר

$$\Delta = \max |\Delta z_i|$$

זו עדינות החלוקה. כעת, תוך שימוש ברציפות f, מראים, בדיוק באותו אופן שבו מראים באינטגרל רימן הממשי, שכאשר $\Delta \to 0$ קיים גבול לסכומי רימן שאינו תלוי בבחירת הנציגים $\{p_i\}$. גבול זה מסומן

$$\int_{w_1}^{w_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{\Delta \to 0} S(f, \{z_i, p_i\})$$

1.2 התכונות הבסיסיות של האינטגרל

1. אם w_1, w_2, w_3 על ישר אחד, ובסדר הזה, אזי

$$\int_{w_1}^{w_2} f + \int_{w_2}^{w_3} f = \int_{w_1}^{w_3} f$$

2.

$$\int_{w_1}^{w_2} f = -\int_{w_2}^{w_1} f$$

3.

$$\int_{w_1}^{w_2} cf = c\int_{w_1}^{w_2} f$$

4.

$$\int_{w_1}^{w_2} f + g = \int_{w_1}^{w_2} f + \int_{w_1}^{w_2} g$$

5.

$$\int_{w_1}^{w_2} 1 = w_2 - w_1$$

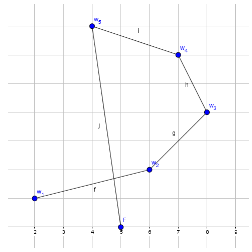
6. נניח כי $M \leq |f(z)|$ לכל $z \in [w_1, w_2]$. אזי

$$\left| \int_{w_1}^{w_2} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq M \left| w_2 - w_1 \right|$$

הוכחה: אגף ימין חוסם מלמעלה את הערך המוחלט של כל סכומי רימן:

$$\left| \sum f(p_i)\, \Delta z_i \right| \leq \sum |f(p_i)| \, |z_{i+1} - z_i| \leq M \sum |z_{i+1} - z_i| = M \left| w_2 - w_1 \right|$$

■



איור 1: מסילה פוליגונלית

מסקנה 1.1 אם $f_n \to f$ במידה שווה על $[w_1, w_2]$ אזי

$$\int_{w_1}^{w_2} f_n \to \int_{w_1}^{w_2} f$$

הוכחה: מתכונה 6, אם $|f - g| < \varepsilon$ על כל הקטע, אזי

$$\left| \int f - \int g \right| < \varepsilon \left| w_2 - w_1 \right|$$

וברור שזה מסיים את ההוכחה. ■

טענה 1.2 נניח כי $[w_1, w_2] \subseteq U$, כאשר U פתוחה, וקיימת F כך שמתקיים $F' = f$ על כל U. אזי

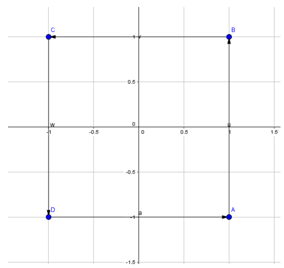
$$\int_{w_1}^{w_2} f(z)\ \mathrm{d}z = F(w_2) - F(w_1)$$

נוכיח את הטענה בהמשך. ראשית נראה שימוש.

מסקנה 1.3 אם P מסילה פוליגונלית סגורה בתוך U וקיימת F על U כאשר $F' = f$ אזי $\int f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.

נרחיב את הגדרת האינטגרל מקטע לכל מסילה פוליגונלית באופן טבעי: אם $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ מסילה פוליגונלית, נגדיר

$$\int f = \sum \int_{w_i}^{w_{i+1}} f$$



איור 2: המסילה הריבועית שניקח

דוגמא חשובה מאוד: ניקח $U = C\setminus\{0\}$. ניקח מסילת ריבוע סביב 0.

> "אני עכשיו כותב משהו, ואתם צריכים להגיד לי 'רגע, רגע, מה אתה עושה?'"
> -המרצה.

כיוון שהפונקציה $\log z$ היא קדומה של $\frac{1}{z}$ על $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, נוכל תוך שימוש בטענה לכתוב

$$\int_{\square} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \log B - \log A + \log C - \log B + \log D - \log C + \log A - \log D = 0$$

זה כמובן בעייתי - אין אפשרות להגדיר את $\log$ בצורה גזירה על כל $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. נוכל לבחור ארבעה ענפים ולקבל:

$$\int_{\square} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \log^{(1)} B - \log^{(1)} A + \log^{(2)} C - \log^{(2)} B + \log^{(3)} D - \log^{(3)} C + \log^{(4)} A - \log^{(4)} D =$$

$$= \log|B| + i\arg^{(1)} B - \log|A| - i\arg^{(1)} A + \log|C| + i\arg^{(2)} C - \log|B| - i\arg^{(2)} B +$$
$$+ \log|D| + i\arg^{(3)} D - \log|C| - i\arg^{(3)} C + \log|A| + i\arg^{(4)} A - \log|D| - i\arg^{(4)} D$$

החלקים הממשיים יתבטלו. כעת, ההליכה לאורך כל צלע של הריבוע תורמת בארגומנט בדיוק $\frac{\pi}{2}$, כי בחרנו ענפים רציפים שמכילים את הצלעות. לכן בסך הכל, אחרי סיבוב שלם, החלק המרוכב יהיה 2π. בסך הכל:

$$\int_{\square} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

כשבוחנים את ההוכחה הזו, רואים שאותה תוצאה מתקבלת כאשר מבצעים אינטגרל לאורך מסילה פוליגונאלית סגורה כלשהי (נגד כיוון השעון).
אם נבצע את האינטגרציה סביב נקודה כך שהריבוע לא מכיל את 0, נקבל שהאינטגרל הוא 0 - אפשר לבחור ענף רציף של $\log$.