תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

30 במרץ 2017

1 טורי חזקות

1.1 התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות

הגדרה 1.1 תהי $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $f_n : U \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות. אומרים כי $f_n \to f$ במידה שווה על קומפקטיות אם לכל $K \subseteq U$ קומפקטית, f_n מתכנסת במידה שווה אל f על K, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $z \in K$ מתקיים

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

דוגמה הפונקציות $f_n(z) = 1 - z^n$ על $U = D = B_1(0)$ - לא מתכנסת במידה שווה, אבל כן על קומפקטיות.

משפט 1.2 (מוכר מהעבר) נניח כי $f_n \to f$ במידה שווה על קומפטיות בתוך $U \subseteq \mathbb{C}$. אם כל f_n רציפה, אז f רציפה.

1.2 התכנסות רגילה ובהחלט של טור

הגדרה 1.3 כרגיל, אם $a_n \in \mathbb{C}$ סדרה, אומרים שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסה (לגבול a) אם סדרת הסכומים החלקיים

$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$

מתכנסת אל a במובן שכבר הגדרנו. הטור מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס.

כמו במקרה הממשי, התכנסות בהחלט גוררת התכנסות רגילה - אותה הוכחה.

הגדרה 1.4 טור חזקות מעל $\mathbb{C}$ סביבה נקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ הוא ביטוי פורמלי מהצורה

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

מה שחשוב לנו הוא תכונות ההתכנסות של טור.

משפט 1.5 (המשפט היסודי על טורי חזקות) לכל טור חזקות כמו למעלה, קיים $R \in [0,\infty]$ כל שלכל $0 \le r < R$ הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בעיגול $B_r(z_0)$, ולכל $r > R$ אין התכנסות כלל בנקודות במרחק r מהנקודה z_0 (יש אפילו שאיפה לאינסוף). על $\partial B_R(z_0)$ לא ידוע דבר באופן כללי על התכנסות. R נתון על ידי נוסחת קושי־הדמאר:

$$R=\frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

התכנסות במידה שווה משמעה התכנסות במידה שווה של סדרת הסכומים החלקיים. לערך הגבול קוראים $f(z)$. התכנסות בהחלט היא במובן הקודם. התנאי על R נותן שההתכנסות על $B_R(z_0)$ היא במידה שווה על קומפקטיות.

בהוכחה כאן, מאוד שימושי להשתמש בבוחן M של ויירשטראס (ובהשוואה לטור גיאומטרי). אם לכל $K \subseteq U$ קופקטית יש M_n כך שעל K מתקיים $|f_n| < M_n$, וכן $\sum M_n < \infty$, אזי הטור $\sum f_n(z)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה על קופקטיות בתוך U.

דוגמא הטור

$$exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

קל לחשב ולמצוא שרדיוס ההתכנסות הוא ∞ ־ הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה על כל קומפקט בתוך $\mathbb{C}$. גם טור גיאומטרי רגיל מתכנס.

מסקנה מהמשפט הכללי על התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות עם המשפט היסודי על טורי חזקות היא הבאה:

משפט 1.6 יהי $f(z)=\sum a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$. אזי $f(z)$ רציפה על $B_R(z_0)$.

נדון כעת בגזירות. גזירות בנקודה $z = z_0$ ברורה:

$$\frac{1}{h}\left(f(z_0+h)-f(z_0)\right)=\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} h^n$$

קיבלנו טור חזקות בעל אותו רדיוס התכנסות R כמו במקורי. הוכחנו שמדובר בפונקציה רציפה, ומשתמשים ברציפות בנקודה 0 כדי להסיק שהגבול קיים וערכו a_1.

נרצה להוכיח גזירות בכל $z \in B_R(z_0)$. נוכל למרכז מחדש את טור החזקות, סביב נקודה אחרת בכדור. בתרגול הבא, נוכיח שלכל $w_0 \in B_R(z_0)$, $f(z)$ שווה גם לטור חזקות

סביב w_0 (עם מקדמים שונים), שרדיוס ההתכנסות שלו הוא לפחות $R-|w_0-z_0|$. החישוב המפורש מראה כי המקדם של $(z-w_0)$ בטור החדש הוא

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k w_0^{k-1}$$

זה מוכיח שטור חזקות הוא גזיר בכל נקודה $w_0 \in B_R(z_0)$ ־ כי ראינו שבמרכז הכדור הטור גזיר, ולכן נשיג גזירות בכל נקודה על ידי מרכוז מחדש ־ ואת ערך הנגזרת נקבל על ידי המקדם שכתוב לעיל. זה בדיוק הערך שמתקבל מגזירה איבר איבר. נקבל כך גם נוסחה לנגזרת מכל סדר (תמיד יש גזירות מכל סדר). בפרט, מתקיים

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

לכן הפונקציה מגדירה את המקדמים.

דוגמא ברור כי, עבור exp שהגדרנו קודם

$$(exp)' = exp$$

ולכן היא e^z ־ נוכיח.

$$g(z) = \frac{f(z)}{e^z}$$
$$g'(z) = \frac{f'e^z - fe^z}{e^{2z}} = 0$$

כמו כן $f(0) = e^0$ ולכן הפונקציות מזדהות.

טענה 1.7 יהי $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ שאינו קבוע. אזי לכל $w_0 \in B_R(z_0)$, המרכוז של הטור סביב w_0 גם אינו קבוע.

הוכחה: נסמן בתור A את קבוצת כל הנקודות w_0 שמרכוז הטור סביבן קבוע ־ באופן שקול, $f(z)$ קבועה בסביבת w_0. A פתוחה, ממש מהגדרתה. מצד שני, היא גם סגורה ־ היא מאופיינת על ידי התאפסות כל הנגזרות בנקודה, וזה תנאי סגור (חיתוך של סגורות הוא סגור). לכן A פתוחה וסגורה, ומקשירות נובע שהיא ריקה או שהיא כל הכדור. היא לא כל הכדור, כי z_0 לא בה, ולכן היא ריקה. ■

מסקנה 1.8 טור חזקות לא קבוע הוא פונקציה רגולרית בכל נקודה $w_0 \in B_R(z_0)$.

הוכחה: תהי $w_0 \in B_R(z_0)$. נמרכז את הטור סביב w_0. המרכוז הזה אינו קבוע, כלומר יש בו מקדם $b_n \neq 0$. יהי k האינדקס הראשון בו $b_k \neq 0$. כעת

$$f(z) = b_0 + (z-w_0)^k \underbrace{(b_k + b_{k+1}(z-w_0) + \dots)}_{\varphi(z)}$$

$\varphi(z)$ רציפה, וגבולה בנקודה w_0 הוא $b_k \neq 0$, ולכן הפונקציה אכן רגולרית. ■

מסקנה 1.9 טור חזקות מרוכב שאינו קבוע מקיים את עקרון המקסימום, עקרון המינימום ועקרון ההעתקה הפתוחה (בתוך מעגל ההתכנסות).

2 פונקציות אנליטיות

הגדרה 2.1 יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום. $f : U \to \mathbb{C}$ נקראת אנליטית או הולומורפית אם לכל $z_0 \in U$ ישנה סביבה שבה $f(z)$ מיוצג תעל ידי טור חזקות בעל רדיוס התכנסות חיובי.

דוגמא באופן טריוויאלי - פולינום, או טור חזקות של ממש על $B_R(z_0)$.
דוגמא מעניינת יותר - נתבונן בתחום $U \setminus \{0\}$, ובפונקציה $f(z) = \frac{1}{z}$. למשל, סביב 1, נכתוב

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

וזה טור חזקות בעל רדיוס התכנסות 1. אפשר בכל נקודה:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{10-(10-z)} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\left(\frac{10-z}{10}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-10)^n}{10^{n+1}}$$

כאן הרדיוס הוא כבר 10.

משפט 2.2 תהי f פונקציה אנליטית על תחום U. אם f אינה קבועה על U, אזי לכל $z_0 \in U$, היא אינה קבועה מקומית בסביבת z_0.

ההוכחה זהה להוכחה שמרכוז מחדש של טור חזקות אינו קבוע.

מסקנה 2.3 יהי U תחום, $f : U \to \mathbb{C}$ אנליטית ולא קבועה. אזי f מקיימת את עקרון המקסימום, המינימום וההעתקה הפתוחה.

הוכחה: כון תכונות מקומיות, ומקומית f היא טור חזקות לא קבוע, שמקיים אותן. ■