תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

26 במרץ 2017

תזכורת $f:U\to\mathbb{C}$ נקראת גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}$$

והוא סופי. אז נסמנו כרגיל $f'\left(z_0\right)$.

דוגמא אם f רגולרית בנקודה $z_0\in U$, אזי f גם גזירה שם.

הוכחה: נזכור שההגדרה של רגולריות אומרת כי לכל z

$$f\left(z+z_0\right)=f\left(z_0\right)+z^k\varphi\left(z\right)$$

כאשר $k\geq 1$ וכן

$$\lim_{z\to 0}\varphi\left(z\right)=a\neq 0$$

אזי

$$\lim_{z\to 0}\frac{f\left(z+z_0\right)-f\left(z_0\right)}{z}=\lim_{z\to 0}z^{k-1}\varphi\left(z\right)$$

אגף ימין רציף מהנחתנו, ולכן קיים הגבול כאשר $z\to 0$, והוא שווה a אם $k=1$, ואחרת - 0. ∎

נשים לב כי אם f גזירה בנקודה z_0, $f'\left(z_0\right)\neq 0$, אזי f רגולרית שם מסדר $k=1$ - נסמן

$$\varphi\left(z\right)=\frac{f\left(z+z_0\right)-f\left(z_0\right)}{z}$$

ואז הגבול באפס הוא $f'\left(z\right)$.

בהמשך יתברר לנו שכל עוד f אינה קבועה בסביבת z_0, גם אם $f'\left(z_0\right)=0$, היא עדיין רגולרית.

בשיעור שעבר ניתחנו את הפונקציה e^z, שהוגדרה לפי

$$e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$

וקיבלנו שהיא גזירה בכל המישור, עם

$$(e^z)' = e^z$$

נדון כעת בפונקציה ההפוכה ־ הלוגריתם. ניקח $w = re^{i\theta}$, וננסה למצוא את $z = x+iy$ שמקיים $e^z = w$. בבירור,

$$x = \log|w|$$

$$y = \arg w$$

הארגומנט נקבע רק מודולו 2π ־ כלומר עד כדי כפולות של 2π. כלומר, לכל $z \neq 0$, הארגומנט הוא קבוצת ערכים הנבדלים זה מזה בכפולות של 2π. נשים לב שלמעשה, e^z לא חד־חד־ערכית:

$$e^{z_1} = e^{z_2}$$

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 - y_2 = 2\pi k$$

כאשר k שלם. לכן חושבים לרוב על הלוגריתם כפונקציה רב ערכית, המתאימה לכל z קבוצה של ערכים. אם נתבונן בשוויון

$$\log z = \log|z| + i\arg z$$

למרות שבאופן גלובלי לא ברור איך להפוך את $\log$ לפונקציה חד־ערכית, אלא אם מבצעים בחירות "שרירותיות ולא עקביות". ישנם תחומים בתוך $\mathbb{C}$ בהם ניתן לעשות זאת (עם שרירותיות אבל גם בעקביות).

הגדרה 0.1 יהי $A \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ תחום. ענף של $\log$ על A הינו בחירה רציפה של ערכי $\log z$ על הקבוצה A. באופן דומה מוגדר גם ענף של $\arg$ על הקבוצה A.

נשים לב שבחירה של $\arg$ושל $\log$ הן שקולות. ישנם תחומים בהם אי אפשר למצוא ענף שכזה ־ למשל המישור בלי הראשית.

משפט 0.2 נניח כי $f : U \to \mathbb{C}$ (כאשר U תחום) וכן $g : V \to U$, ומתקיים

$$\forall z \in V \;\; f(g(z)) = z$$

נניח כי g רציפה בסביבת z_0, וכן f גזירה בסביב $g(z_0)$, עם $f'(g(z_0)) \neq 0$. אזי g גזירה בנקודה z_0 ומתקיים

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}$$

הוכחה: עבור z_0, $h>0$ קטן, מתקיים

$$z_0+h=f\left(g\left(z_0+h\right)\right)=f\left(g\left(z_0\right)+R_{g,z_0}\left(h\right)\right) \tag{1}$$

כאשר $R_{g,z_0}\left(h\right)=g\left(z_0+h\right)-g\left(z_0\right)$. בהוכחה נרצה להראות כי כאשר $h\to 0$,

$$\frac{R_{g,z_0}\left(h\right)}{h}\to\frac{1}{f'\left(g\left(z_0\right)\right)}$$

נשים לב כי $R_{g,z_0}\left(h\right)\neq 0$, כי אחרת $z_0+h=z_0$. לכן נוכל בהמשך לחלק בו. נמשיך לפתח את שוויון (1) תוך שימוש בגזירות f:

$$(1)=\underbrace{f\left(g\left(z_0\right)\right)}_{=z_0}+f'\left(g\left(z_0\right)\right)R_{g,z_0}\left(h\right)+o\left(R_{g,z_0}\left(h\right)\right)$$

לכן נקבל בסך הכל:

$$h=f'\left(g\left(z_0\right)\right)R_{g,z_0}\left(h\right)+o\left(R_{g,z_0}\left(h\right)\right)$$

נחלק כעת את שני האגפים בגודל $R_{g,z_0}\left(h\right)$:

$$\frac{h}{R_{g,z_0}\left(h\right)}=f'\left(g\left(z_0\right)\right)+\frac{o\left(R_{g,z_0}\left(h\right)\right)}{R_{g,z_0}\left(h\right)}$$

מרציפות g נקבל כי כאשר $h\to 0$, גם $R_{g,z_0}\left(h\right)\to 0$, ואז נקבל, כאשר נשאיף $h\to 0$, בדיוק את מה שרצינו. ■

מסקנה 0.3 בתחום U בו ניתן לבחור את $\arg z$ באופן רציף, $\log z$ גזירה ומקיימת

$$\left(\log z\right)'=e^z$$

הוכחה: משתמשים במשפט הקודם עם $f\left(z\right)=e^z$, $g\left(z\right)=\log z$, שנבחרת באמצעות בחירה רציפה של ארגומנט, ואז

$$g'\left(z\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(z\right)\right)}=\frac{1}{e^{\log z}}=\frac{1}{z}$$

שהרי בכל נקודה z, $e^z\neq 0$. ■

מכאן למשל ברור למה לא ניתן לבחור את $\log$ רציפה בכל המישור המנוקב - נתבונן בפונקציה

$$\varphi\left(z\right)=\log\left(e^z\right)$$

גוזרים אותה, וממשיכים (נראה בתרגול).