תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

23 במרץ 2017

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרה הבאה:

הגדרה 0.1 קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{C}$ נקראת פשוטת קשר מישורית אם לא קיים פירוק של U^c כאיחוד זר $U^c = F \cup K$, כאשר F סגורה, $K \neq \emptyset$ קומפקטית.

דוגמה $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אינה פשוטת קשר מישורית - $U^c = \emptyset \cup \{0\}$.
לעומת זאת הפס

$$U = \{z \mid -1 < \mathrm{Re} z < 1\}$$

כן פשוטת קשר מישורית - למרות שהמשלים שלה לא קשירה. כדי לדעת את זה, נראה משפט:

משפט 0.2 תהי U פתוחה ונניח כי

$$U^c = \bigcup_\alpha E_\alpha$$

כאשר כל E_α סגורה, לא קומפקטית וקשירה מסילתית. אזי U פשוטת קשר מישורית.

הוכחה: נניח כי

$$U^c = F \cup K$$

כאשר F סגורה, K קומפקטית, והאיחוד הוא זר. נוכיח כי $K = \emptyset$. נרשום

$$U^c = \left(\bigcup E_\alpha\right) \cap (F \cup K) = \bigcup (E_\alpha \cap F) \cup (E_\alpha \cap K)$$

כעת, לכל α, $E_\alpha = (E_\alpha \cap F) \cup (E_\alpha \cap K)$. כך הצגנו את E_α כאיחוד זר של שתי קבוצות סגורות. E_α סגורה וקשירה מסילתית, כלומר קשירה, ולכן נובע כי $E_\alpha \cap F$ או $E_\alpha \cap K$ ריקה, לכל α. כלומר, לכל α, $E_\alpha \subseteq F$ או $E_\alpha \subseteq K$. אם היה α עבורו $E_\alpha \subseteq K$, ולכן קומפקטית (סגורה ותת קבוצה של קומפקטית) בסתירה להנחה. לכן, לכל α, $E_\alpha \subseteq F$, כלומר

$$U^c = \bigcup E_\alpha \subseteq F$$

ולכן נובע $F = U^c$, $K = \emptyset$. ■

1 גזירות

הגדרה 1.1 תהי $U\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{C}$ פונקציה, $z_0\in U$. נאמר כי f גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול הבא, ואינו אינסוף:

$$\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0}\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}$$

אם הגבול קיים, מסמנים אותו $f'\left(z_0\right)$.

דוגמא $f\left(z\right)=z$ גזירה בכל $\mathbb{C}$. הגבול הוא 1.

הוכחות שזהות לחלוטין למקרה הממשי מראות כי הנוסחאות רגילות לנגזרת מתקיימות גם כאן - סכום, מכפלה, מנה (כשהמכנה לא מתאפס) והרכבה (כשהיא מוגדרת).

דוגמא $f\left(z\right)=\overline{z}$ אינה גזירה. נבדוק את קיום הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

אם נשאף לאורך הציר הממשי, נקבל 1. לכן אם הגבול קיים הוא 1. אם נשאף לאורך הציר המדומה, נקבל -1, ולכן הגבול לא קיים, והפונקציה לא גזירה.

דוגמאות משפטים שנוכיח בעתיד:

1. אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ גזירה וחד־חד־ערכית אז $f\left(z\right)=az+b$.
2. אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ גזירה המקיימת

$$\lim_{z\to\infty}f\left(z\right)=\infty$$

אזי f היא פולינום.

3. אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ גזירה, הטווח של f יכיל את כל $\mathbb{C}$, למעט אולי נקודה אחת.

שאלה די טבעית היא מה הקשר בין הזיגרות הזו לדיפרנציאביליות של פונקציות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. ניזכור שאם $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^2$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה $z_0\in U$ אם קיימת טרנספורמציה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ שמקרבת את השינוי של f סביבה z_0 - משמע מתקיימת תכונת הקירוב הלינארי:

$$f\left(z_0+h\right)=f\left(z_0\right)+T\left(h\right)+o\left(||h||\right)$$

כאשר

$$\lim_{h\to 0}\frac{o\left(||h||\right)}{||h||}\to 0$$

ניזכר שכזו T, אם קיימת, היא יחידה ־ אם T_1,T_2 מקיימות את זה, אזי

$$(T_1-T_2)(h)=o(||h||)$$

אבל טרנספורמציה לינארית שאינה טרנספורמציית האפס לא יכולה לקיים זאת ־ ניקח כיוון $v\neq 0$ שבו $(T_1-T_2)v\neq 0$, ונגדיר $h=tv$, כאשר $t\to 0$. כך נקבל כי

$$\left|\left|S\left(\frac{tv}{||tv||}\right)\right|\right|=||S(v)||\neq 0$$

ולכן אין שאיפה לאפס. לכן $T_1-T_2=0$, כלומר $T_1=T_2$.

נחזור להגדרת הגזירות המרוכבת. היא שקולה לתכונת הקירוב הלינארי, אבל בעזרת טרנספורמציה לינארית T בעלת אופי מאוד ספציפי: $T(h)=wh$ עבור $w\in\mathbb{C}$ כלשהו (כאשר מזהים את $\mathbb{R}^2$ עם $\mathbb{C}$ באופן הרגיל).

נרצה להבין מהן הטרנספורמציות הלינאריות שנראות כך. באופן שקול, נבין את המטריצות המייצגות שלהן. ניקח $w=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$, ונמצא מטריצה המייצגת את טרנספורמציית הכפל פי w.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x-\beta y\\ \alpha y+\beta x\end{pmatrix}$$
$$ax+by=\alpha x-\beta y$$
$$cx+dy=\beta x+\alpha y$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

לסיכום, $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה בנקודה $z_0\in U$ אם ורק אם מתקיימת תכונת הקירוב הלינארי (כלומר היא דיפרנציאבילית כפונקציה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$) והדיפרנציאל הוא מהצורה שמצאנו.

דוגמא נשוב לדבר על ההצמדה. ההעתקה היא $(x,y)\to(x,-y)$. זו העתקה לינארית במרחב $\mathbb{R}^2$ (לא עבור $\mathbb{C}$). המטריצה של הדיפרנציאל היא

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

וזו לא מהצורה שמצאנו.

נחבר את הדיון לנגזרות חלקיות (במובן של חדו"א 2). ניזכר כי ביחס לבסיס הסטדנרטי, הייצוג של T מתכונת הקירוב הלינארי הוא על ידי מטריצת הנגזרות החלקיות, כלומר אם

$$f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$$

אזי המטריצה המייצגת של T היא

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

נרצה שזו תהיה מהצורה שלעיל, כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\beta$$

מערכת זו נקראת משוואות קושי רימן.

סיכום אם $U\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{C}$, $z_0\in U$, אזי f גזירה בנקודה z_0 אם ורק אם

1. f דיפרנציאבילית בנקודה z_0.
2. נשוואות קושי רימן מתקיימות, כאשר נסמן $f(z)=u(z)+iv(z)$.

במקרה ששני אלה מתקיימים נקבל

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}i=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}i$$

נזכרו כי דיפרנציאביליות מובטחת מהתנאי שהנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת נקודה.

דוגמא נביט בפונקציה $f(z)=e^z=e^x\cdot(\cos y+i\sin y)$, כאשר $z=x+iy$. נבדוק שהפונקציה הזו גזירה במובן המרוכב. יש לבדוק למעשה רק את משוואות קושי רימן (הנגזרות החלקיות רציפות בכל מקום, כלומר f גזירה).

$$u(z)=u(x,y)=e^x\cos y$$
$$v(z)=v(x,y)=e^x\sin y$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

ואכן משוואות קושי רימן מתקיימות.

דוגמא נוספת:

$$\cos z:=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

ברור כי אם z ממשי זה מתלכד עם ההגדרה הממשית. זו מכפלה בקבוע של סכום של שתי פונקציות שכל אחת מהן הרכבה של שתי פונקציות גזירות, ולכן זו פונקציה גזירה. נגזור:

$$(\cos z)'=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=\frac{i\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)}{2}$$

אם נגדיר

$$\sin z := \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i}$$

זה שוב מתלכד עם ההגדרה הממשית, וכרגיל יתקיים

$$(\cos z)' = -\sin z$$
$$(\sin z)' = \cos z$$