תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

29 ביוני 2017

1 השלמה

בהוכחת המשפט בשיעור שעבר על שקילות קונפורמית של טבעות, הופיעה העובדה שלא ניתן למצוא ענף רציף של z^{α} על מעגל כלשהו סביב הראשית. זה הוכח בתרגיל, אבל נראה עכשיו הוכחה נוספת. **הוכחה:** נניח שאפשר לעשות זאת למשל על מעגל היחידה (אחרת מחליפים עם r^{α}). זה יאפשר לנו להגדיר ענף רציף של z^{α} בכל המישור המנוקב $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ על ידי

$$z \mapsto |z|^{\alpha} g\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

כאשר g היא ענף רציף במעגל היחידה. נסמן אותה $f(z)$. נוכיח בעוד רגע שזו אנליטית. בלי הגבלת הכלליות $\alpha > 0$ (אנחנו הולכים להראות שהוא שלם). נגדיר $f(0) = 0$ וזו גם רציפה באפס. ממשפט שהוכחנו נקבל כי f אנליטית גם בנקודה 0. על ידי החסרת שלמים נוכל להניח $\alpha \in (0,1)$. אבל אז f לא יכולה להיות גזירה באפס, כי

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0}|z|^{\alpha-1}$$

אבל $\alpha - 1 < 0$, ולכן הגבול הזה לא סופי (אינסופי במובן הממשי).

נוכיח אם כן שהיא אנליטית. נוכל להוכיח אנליטית בכל נקודה $z_0 \neq 0$. ניקח $B_r(z_0)$, עבור r קטן מספיק כך שניתן להגדיר שם את $\log z$ אנליטית, ולכן גם את $\alpha \log z$, ומכאן את $h = z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$. זו הרכבה של אנליטיות, ולכן אנליטי. נראה שהיחס $\frac{f}{h}$ הוא קבוע באותו כדור. לכל z שם, מתקיים

$$\frac{f(z)}{h(z)} \in 1^{\alpha}$$

וזו קבוצה בת מניה של ערכים, אבל כמובן $\frac{f}{h}$ היא רציפה - לכן היא קבועה. מכאן נקבל כי f אכן אנליטית. ■

כעת נעבור לשאלות של סטודנטים.

2 שאלות

2.1 לנדאו בלוך

בהוכחה של המשפט, הנחנו כי f מוגדרת בסביבת $\overline{D}$. טענו שאותו קבוע טוב גם לפונקציה f שמוגדרת רק על D. נרצה לגשר על הפער הזה - נניח כי f מוגדרת על D. לכל $r > 1$, נגדיר

$$f_r(z) = r \cdot f\left(\frac{z}{r}\right)$$

זו פונקציה שמוגדרת בסביבת $\overline{D}$, בפרט על $B_r(0)$, ולכן ההוכחה תופסת לגביה (היא מקיימת $f_r'(0) = f'(0) = 1$). לכן הטווח של f_r מכיל כדור ברדיוס $\frac{1}{40}$, ולכן הטווח של f מכיל כדור ברדיוס $\frac{1}{40r}$, כאשר $r > 1$ שרירותי. אם לא עובדים מעט יותר, מקבלים שלכל $c < \frac{1}{40}$ הטווח של f מכיל כדור ברדיוס c.

2.2 עקרון ההעתקה הפתוחה

נוכיח את העיקרון תוך שימוש במשפט רושה. ניקח $f : D \to \mathbb{C}$ אנליטית לא קבועה, ונניח $f(0) = 0$. נראה שהתמונה $f(B_r(0))$ פתוחה, עבור $r \in (0,1)$. ניקח את r קטן מספיק ככה שעל $\partial B_r(0)$ אין התאפסות של f (תמיד קיים כי f אנליטית ולא קבועה). נסמן

$$\alpha = \min_{|z|=r} |f(z)| > 0$$

רוצים להוכיח שלכל $|w| < \alpha$ קיים z עם $f(z) = w$. כלומר, נרצה להראות שלפונקציה $g(z) = f(z) - w$ יש התאפסות על $B_r(0)$. ידוע לנו שהפונקציה f מתפאסת שם, ושימוש פשוט במשפט רושה (קל להראות את התנאים) מראה כי גם g מתאפסת שם.