# תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

25 ביוני 2017

## 1 השלמה - שקילויות קונפורמיות

**משפט 1.1** תהיינה $T_{r_1,R_1}$, $T_{r_2,R_2}$ שתי טבעות (לא ודווקא עם אותו מרכז) במישור. הן שקולות קונפורמית אם ורק אם $\frac{R_1}{r_1}=\frac{R_2}{r_2}$ (ובמקרה זה נמיין את כל השקילויות).

**הוכחה:** בלי הגבלת הכלליות, על ידי הזזה בקבוע, ניתן להניח שהמרכזים הם בראשית. כעת, על ידי כפל בקבוע נוכל להניח $r_1=r_2=1$, ואז נותר להראות שקילות קונפורמית אם ורק אם $R_1=R_2=R$. ברור שאם זה מתקיים אז הן שקולות. יש להראות את הכיוון השני (אם נראה את זה ברור שהשקילויות יהיו פשוט מהטבעת לעצמה, כלומר $z\to\lambda z$ או $z\to\lambda\frac{R}{z}$ עבור $|\lambda|=1$ - ומכאן אפשר לחשב את השקילויות בין כל שתי טבעות על ידי הוספת ההזזה והמתיחה). נרצה להוכיח שבמקרה שלנו של שתי טבעות, $T_{1,R_1},T_{1,R_2}$, אם יש העתקה $f:T_{1,R_1}\to T_{1,R_2}$ שהיא הומיאומורפיזם (רציפה שההופכית שלה מוגדרת ורציפה), אז היא מקיימת אחת משתי אפשרויות:

1. תמיד $|z_i|\to 1$ אם ורק אם $|f(z_i)|\to 1$, וכן $|z_i|\to R_1$ אם ורק אם $|f(z_i)|\to R_2$.
2. תמיד $|z_i|\to 1$ אם ורק אם $|f(z_i)|\to R_2$, וכן $|z_i|\to R_1$ אם ורק אם $|f(z_i)|\to 1$.

כדי להוכיח את זה נגדיר את המשוג של שאיפה כיוונית לאינסוף:

**הגדרה 1.2** תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה (אפשר לעשות דבר דומה בכל מימד) ותהי $\{z_i\}\subseteq U$. נגיד שהסדרה שואפת כיוונית לאינסוף בתוך $U$ אם לכל קומפקט $K\subseteq U$ קיים $N$ כך שלכל $n,m>N$, אפשר לחבר את $z_n,z_m$ במסילה שאינה חותכת את $K$.

נגדיר יחס שקילות על סדרות ששואפות כיוונית לאינסוף: $\{z_i\}\sim\{w_i\}$ אם ורק אם לכל קומפקט $K$ קיים $N$ שלכל $m,n>N$ אפשר לחבר את $z_n,w_m$ במסילה שלא חותכת את $K$. קל לראות שזו יחס שקילות. לכל מחלקת שקילות נקרא קצה של $U$. רואים בבירור, למשל, שלטבעת יש בדיוק שני קצוות - הקצה $|z_i|\to 1$, והקצה $|z_i|\to R$. כמו כן, כיוון שהמושג הוגדר במונחים של קומפקטיות ורציפות, כל הומיאומורפיזם בין קבוצות פתוחות משרה העתקה חד-חד-ערכית ועל בין הקצוות שלהן. כיוון ששקילות קונפורמית היא בפרט הומיאומורפיזם, הטענה שלנו נובעת (על המקרים האפשריים).

אנחנו סופסוף מוכנים להוכיח את המשפט. לפי מה שראינו עכשיו, אחת משתי האפשרויות מתקיימות. על ידי החלפת $f(z)$ עם $\frac{R}{f(z)}$, אם צריך, אפשר להניח שתמיד מתקיימת אפשרות 1 בלי הגבלת הכלליות. כעת, נוכיח כי $R_1=R_2$, $f(z)=\lambda z$ (וזה יוכיח את כל מה שטענו בעבר). נגדיר $\alpha=\frac{\log R_2}{\log R_1}>0$ ונביט בפונקציה הרציפה

$$\varphi(z)=\frac{|f(z)|}{|z|^{\alpha}}$$

זו רציפה על $T_{1,R_1}$ ומתקיים שאם $|z_i| \to 1$ או $|z_i| \to R_1$ אזי $\varphi(z_i) \to 1$. כלומר, $\varphi$ מתרחבת לפונקציה (ממשית וחיובית) רציפה על $\overline{T_{1,R_1}}$ שמקבלת את 1 בשפה. לכן, המינימום או המקסימום הגבלובלי של $\varphi$ על הקבוצה הקומפקטית הזו מתקבל בנקודה $z_0 \in U$. נחלק את $T_{1,R_1}$ לאיחוד (לא זר!) של שני תחומים $U_1, U_2$, כאשר כל אחד מהם לחוד הוא פשוט קשר (למשל שלושת הרבעים הימניים ושלושת הרבעים השמאליים של הטבעת), ונוכל לעשות זאת כאשר $z_0 \in U_1 \cap U_2$.על כל אחד מהם נוכל להגדיר את $\arg z$ באופן רציף, ולכן נוכל להגדיר עליו את $z^\alpha$ כפונקציה אנליטית, שנסמנה $g_i(z)$ על $U_i$. ננצל את חופש הבחירה בבחירת הארגומנט בנקודה אחת - $z_0$ - כך שנוכל להניח גם $g_1(z_0) = g_2(z_0)$. כעת נביט בפונקציה

$$\psi_i(z) = \frac{f(z)}{g_i(z)}$$

נשים לב שמתקיים $|\psi_i(z)| = \varphi_i(z)$. לכן נקבל כי $z_0$ היא מקסימום מקומי (או מינימום מקומי) של $\psi_i(z)$ בתחום $U_i(z)$ (וכמובן שהפונקציות הללו לא מתאפסות, כי הטווח של $f$ הוא טבעת). מעקרונות המקסימום והמינימום, נקבל כי $\psi_i(z) = \lambda_i$ קבועות. נשים לב שמתקיים $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, שכן $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ לפי הבחירה שלנו. נשים לב שכמובן $|\lambda| = 1$. בסך הכל, קיבלנו $g_i(z) = \frac{f(z)}{\lambda}$, כלומר קיבלנו בחירה אנליטית של $z \mapsto z^\alpha$ <u>בכל הטבעת</u>. הוכחנו בעבר בתרגיל בית שזה לא אפשרי על אף מעגל סביב 0, אלא אם $\alpha$ שלם. במקרה שלנו $\alpha$ חיובי, ונקבל כי $f(z) = \lambda z^n$. כאשר $n \geq 2$, ההעתקה הזו לא חד־חד־ערכית, ולכן $n = \alpha = 1$. מכאן $R_1 = R_2 = R$, וכן $f(z) = \lambda z$ - סיימנו. ■