תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

2 ביולי 2017

1 המשכה אנליטית

הגדרה 1.1 תהי $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית, ויהי $U\subseteq V$ תחום גדול יותר. פונקציה $F:V\to\mathbb{C}$ תקרא המשכה אנליטית של f בתחום V אם היא אנליטית ומקיימת $F\mid_U=f$.

הגדרה 1.2 לכל $z_0\in\partial U$, נאמר כי z_0 רגולרית עבור f אם קיימת עבור f המשכה אנליטית בתחום $B_r\left(z_0\right)\cup U$. אחרת נאמר כי z_0 סינגולרית עבור f.

דוגמא נקח

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$$

הטור מתכנס על D, והפונקציה באגף ימין מהווה המשכה אנליטית שלו לכל $\mathbb{C}\backslash\left\{1\right\}$. כאשר $z\to1$ הפונקציה לא חסומה, ולא תתכן המשכה אנליטית לסביבה של 1, כלומר 1 היא סינגולרית, וכל $\partial D\backslash\left\{1\right\}$ רגולריות.

הערה 1.3 הנקודות הרגולריות של f מהוות קבוצה פתוחה (בתוך ∂D) והסינגולריות - סגורה.

הערה 1.4 המשכה אנליטית, אם קיימת, היא יחידה - שכן שתי פונקציות אנליטיות שמזדהות על קבוצה פתוחה הן שוות.

טענה 1.5 אם $f=\sum a_nz^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, אזי קיימת $z_0\in\partial B_R\left(0\right)$ סינגולרית.

הוכחה: נניח בשלילה שלא. אזי לכל $z_0\in\partial B_R\left(0\right)$ קיימת המשעה אנליטית $F_{z_0}\left(z\right)$ שמוגדרת בתוך $U\cup B_{\varepsilon_0}\left(z_0\right)$. נגדיר

$$F\left(z\right)=\begin{cases}F_{z_0}\left(z\right) & z\in B_{\varepsilon_0}\left(z_0\right)\\ f\left(z\right) & z\in B_R\left(0\right)\end{cases}$$

כעת, כל שני כדורים $B_{\varepsilon_0}\left(z_0\right),B_{\varepsilon_1}\left(z_1\right)$ שנחתכים יתכו גם עם U, ולכן, אם נסמן

$$V=B_{\varepsilon_0}\left(z_0\right)\cap B_{\varepsilon_1}\left(z_1\right)\cap U\neq\emptyset$$

אזי מתקיים

$$F_{z_0}\mid_V = F_{z_1}\mid_V = f\mid_V$$

ולכן גם

$$F_{z_0}\mid_{B_{\varepsilon_0}(z_0)\cap B_{\varepsilon_1}(z_1)} = F_{z_1}\mid_{B_{\varepsilon_0}(z_0)\cap B_{\varepsilon_1}(z_1)}$$

לכן F מוגדרת היטב. כעת, F מוגדרת על קבוצה פתוחה שמכילה את $\overline{B}(0,R)$, כלומר על $B(0,R+\varepsilon)$, ולכן הטור הבא מתכנס ברדיוס $R+\varepsilon$:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

בסתירה להנחה שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא R. ■

דוגמא נגדיר

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

פונקציה זו מתכנסת בהחלט ובמידה שווה בכדור $\overline{B}(0,1)$, אך $z=1$ נקודה סינגולרית. זה ינבע מהטענה הבאה.

טענה 1.6 אם $\sum a_nz^n$ בעל רדיוס התכנסות 1 וכן $a_n\geq 0$ לכל n, אזי $z_0=1$ היא נקודה סינגולרית.

בשביל הטענה הזו נצטרך טענת עזר.

טענה 1.7 אם $\sum a_nz^n$ מתכנס ברדיוס 1, אזי $|z_0|=1$ היא רגולרית אם ורק אם רדיוס ההתכנסות של

$$f\left(\frac{z_0}{2}+z\right)=\sum\frac{f^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!}z^n$$

הוא גדול מחצי.

הוכחה: אם הרדיוס גדול מחצי, אז אפשר להמשיך את f אל $z_0\in B_r\left(\frac{z_0}{2}\right)$ על ידי טור חזקות (וזו המשכה אנליטית כי הן מסכימות על $B_{\frac{1}{2}}(z_0)$). בכיוון השני, אם f אנליטית בתוך $U=B_1(0)\cup B_\varepsilon(z_0)$, אזי קיים $B_r\left(\frac{z_0}{2}\right)\subseteq U$ עם $r>\frac{1}{2}$, ולכן הרדיוס אכן גדול מחצי. ■

הוכחה: (של הטענה הקודמת) נראה שאם 1 רגולרית, אז גם כל $|z_0|=1$ רגולרית, בסתירה לטענה קודמת.

נשים לב שמתקיים

$$f^{(n)}(z)=\sum_{m=n}^{\infty}\underbrace{m\cdots(m-n+1)\,a_m}_{\geq 0}z^{m-n}$$

וזאת לכל n. מכאן

$$\left|f^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)\right|=\left|\sum m\cdots(m-n+1)\,a_m\left(\frac{z_0}{2}\right)^{m-n}\right|\leq\sum m\cdots(m-n+1)\,a_m2^{n-m}=f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

כלומר, המקדמים של $\sum\frac{f^{(n)}\left(\frac{z}{2}\right)}{n!}z^n$ חסומים על ידי המקדמים של $\sum\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}z^n$, ולכן רדיוס ההתכנסות בנקודה $\frac{z_0}{2}$ הוא לפחות הרדיוס בנקודה $\frac{1}{2}$, שהוא גדול מחצי, כי 1 רגולרית.
לכן גם z_0 רגולרית - והשגנו את הסתירה שרצינו. ■

דוגמא $f(z)=\sum z^{n!}$ - רדיוס ההתכנסות הוא 1, ולכן מהטענה 1 סינגולרית. נראה כעת שכל ∂D היא סינגולרית. יהא $\lambda\in\partial D$ שורש יחידה מסדר m. אזי

$$f(\lambda z)-f(z)=\sum(\lambda z)^{n!}-\sum z^{n!}=\sum_{n=0}^{m-1}\left(\lambda^{n!}-1\right)z^{n!}$$

זהו פולינום - פונקציה שלמה, אנליטית בכל $\mathbb{C}$. לכן $f(z)$ ניתנת להמשכה אנליטית בנקודה z_0 אם ורק אם $f(\lambda z)$ ניתנת להמשכה אנליטית בנקודה z_0, אם ורק אם $f(z)$ ניתנת להמשכה בנקודה $\frac{z_0}{\lambda}$. f סינגולרית בנקודה $z_0=1$, ולכן גם בכל שורשי היחידה, שהם קבוצה צפופה בשפה, אבל קבוצת הנקודות הסינגולריות סגורה - ולכן כל ∂D סינגולריות.

הגדרה 1.8 במקרה שבו כל ∂U הן סינגולריות, נאמר כי ∂U היא <u>הגבול הטבעי</u> של f.

משפט 1.9 (פוליה - Polya) אם $\sum a_nz^n$ מתכנס ברדיוס 1, אז ניתן לבחור סימנים $\varepsilon_n\in\{\pm1\}$ כך שהטור $\sum\varepsilon_na_nz^n$ יהיה סינגולרי בכל השפה.

2 פונקציות הרמוניות

הגדרה 2.1 יהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$. פונקציה $f:U\to\mathbb{R}$ תקרא הרמונית בתחום U אם היא גזירה פעמיים ברציפות ומקיימת

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

האופרטור הזה נקרא לפלסיאן.

דוגמאות קבוע, x, y, x^2-y^2, $2xy$ וכדומה.

טענה 2.2 היא U תחום פשוט קשר. $u:U\to\mathbb{R}$ היא הרמונית אם ורק אם קיימת $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית עם $\mathrm{Re}f=u$. אם יש כזו f, נכתוב $f=u+iv$, ונאמר כי v הצמודה ההרמונית של u (יחידה רק עד כדי קבוע).

הוכחה: נניח כי $f = u + iv$ אנליטית. אזי ממשוואות קושי רימן מתקיים

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כעת

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

ולכן הלפלסיאן מתאפס.
בכיוון השני, נניח כי u הרמונית. נגדיר:

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

בדיקה ישירה מראה שההרמוניות של u מבטיחה את קיום קושי רימן עבור פונקציה זו - לכן היא אנליטית. התחום U הוא פשוט קשר, ולכן קיימת f קדומה של g. נכתוב $f = u_0 + iv_0$, ומקשוי רימן נקבל

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

לכן u, u_0 נבדלות בקבוע, ונוכל להזיז את f בקבוע הזה. ■

דוגמאות ראינו את $x^2 - y^2, 2xy$. נשים לב

$$x^2 - y^2 + 2xyi = (x + iy)^2$$

באופן כללי, $\operatorname{Im}(z^n), \operatorname{Re}(z^n)$ הן פונקציות הרמוניות ממעלה n. בנוסף, יש לנו הפונקציה $\log|z| = \operatorname{Re}(\log z)$ שהיא הרמונית בכל $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ - והיא ההרמונית היחידה שתלויה רק בערך המוחלט (רדיאלית). באופן כללי, אם f אנליטית ולא מתאפסת אזי $\log|f(z)| = \operatorname{Re}(\log(f(z)))$. גם $\arg$, בתחום שבו מצליחים להגדיר אותה, היא הרמונית.

משפט 2.3 (תכונת הערך הממוצע) נניח כי u הרמונית בתחום $B(z_0, R+\varepsilon)$. אזי

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

זה נכון גם אם u הרמונית רק בכדור $B_{z_0}(R)$ ורציפה על השפה.

הוכחה: נובע מנוסחת קושי. ניקח f אנליטית (ונניח $z_0 = 0$, $R = 1$). אזי

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} f(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} = \left[z = e^{i\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) i \,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \,\mathrm{d}\theta$$

לכן הנוסחה נכונה גם לחלק ממשי ולחלק מדומה - וכל ונקציה הרמונית היא חלק ממשי של פונקצהי אנליטית (התחום הוא כדור, בפרט פשוט קשר). ∎

מסקנה 2.4 (עקרום המינימום והמקסימום) אם u הרמונית מקבלת מקסימום (מינימום) בתוך U, אזי היא קבועה מקומית. לחילופין, המקסימום (מינימום) של u על K קומפקטית מתקבלים על ∂K.

הוכחה: אם z_0 מקסימום מקומי אז לכל r קטן מספיק מתקיים

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \,\mathrm{d}\theta \le u(z_0)$$

ולכן יש שוויון. מרציפות נקבל $u(z_0) = u\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$ לכל θ. ∎

משפט 2.5 (נוסחת האינטרל של פואסון) אם u הרמונית בתוך D, ורציפה על ∂D, אזי לכל $w \in D$ מתקיים

$$u(w) = u\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u\left(e^{i\theta}\right) \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i(\varphi-\theta)}}{1 - re^{i(\varphi-\theta)}}\right) \mathrm{d}\theta$$

מסמנים

$$P_r(\varphi - \theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i(\varphi-\theta)}}{1 - re^{i(\varphi-\theta)}}\right)$$

וזה נקרא גרעין פואסון.

הוכחה: נתחיל מנוסחת קושי:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) \frac{z}{z - w} \frac{\mathrm{d}z}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - w} \mathrm{d}\theta$$

אם נחליף את $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-w}$ בפונקציה $g\left(e^{i\theta}\right)+\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-w}$, כאשר g אנליטית עם $g\left(0\right)=0$, הנוסחה עדיין תהיה נכונה (בגלל תכונת הערך הממוצע - האינטגרל ייתן $g\left(0\right)$). נרצה להפוך את הערך על השפה לממשי, ולכן נרצה לעשות את הדבר הבא:

$$\frac{z}{w-z}=1+\frac{w}{z-w}$$

ולכן נרצה לקחת את

$$1+\frac{w}{z-w}+\frac{\overline{w}}{\overline{z}-\overline{w}}$$

זו לא אנליטית במשתנה z. נשים לב, עם זאת, שעל השפה מתקיים $\overline{z}=\frac{1}{z}$ ולכן הגורם הימני הוא למעשה

$$\frac{z\overline{w}}{1-z\overline{w}}$$

זו כבר אנליטית במשתנה z. כעת על השפה (ולכן בתוך האינטגרל) מתקיים

$$1+\frac{w}{z-w}+\frac{\overline{w}}{\overline{z}-\overline{w}}=\frac{1}{2}+\frac{w}{z-w}+\frac{1}{2}+\frac{\overline{w}}{\overline{z}-\overline{w}}=\frac{1}{2}\left(\frac{z+w}{z-w}+\overline{\frac{z+w}{z-w}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{z+w}{z-w}\right)$$

ולכן קיבלנו את הזהות שרצינו עבור פונקציה הרמונית (חלק ממשי של אנליטית). ■

מסקנה 2.6 תהא $h:\partial G\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי

$$u\left(w\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}h\left(z\right)\mathrm{Re}\left(\frac{z+w}{z-w}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

כאשר $z=e^{i\theta}$, זו פונקציה הרמונית בכל D עם $u\left(w\right)\to h\left(z\right)$ כאשר $w\to z$, $\left|z\right|=1$.

הוכחה: נשים לב מהפיתוח שעשינו קודם שלמעשה

$$u=\frac{1}{2\pi}\int h\left(1+\frac{w}{z-w}+\frac{\overline{w}}{\overline{z}-\overline{w}}\right)\,\mathrm{d}\theta=f\left(w\right)+g\left(\overline{w}\right)$$

כאשר f,w אנליטיות. כעת,

$$u=\mathrm{Re}\left(u\right)=\mathrm{Re}\left(f\left(w\right)\right)+\mathrm{Re}\left(g\left(\overline{w}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(f\left(w\right)\right)+\mathrm{Re}\left(\overline{g\left(\overline{w}\right)}\right)$$

וזה סכום של הרמוניות. ■

טענה 2.7 אם u מקיימת את תכונת הערך הממוצע אזי u הרמונית.

הוכחה: ניתן להגדיר $\tilde{u}$ שמסכימה עם u על השפה של $B_r(z_0)$, והרמונית בפנים. $u, \tilde{u}$ מקיימות את תכונת הערך הממוצע, ולכן גם $u - \tilde{u}$. לכן פונקציה זו מקיימת את עקרון המינימום (והמקסימום) - אבל היא מתאפסת על השפה, ולכן היא חייבת להתפאס גם בכל הפנים. לכן u הרמונית. ■