תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

18 ביוני 2017

1 משפט ההעתקה של רימן ־ יחידות

אם U תחום פשוט קשר, $w_0 \in U$, אז קיימת $f : U \to D$ חד־חד־ערכית ועל עם $f\left(w_0\right) = 0$. נרצה להוכיח יחידות, במובן שאם דורשים $f'\left(w_0\right) > 0$ ממשי חיובי, אז f יחידה. כדי להשיג קיום שלה, אפשר לקחת λf, עבור f מההוכחה, כאשר $|\lambda| = 1$, ולסובב במידת הצורך. מדוע זו יחידה? נניח כי גם g כזו. אזי $g \circ f^{-1} : D \to D$ שקילות קונפורמית, וחישוב מיידי עם נגזרת הרחבה מראה שהנגזרת של $g \circ f^{-1}$ בנקודה 0 היא ממשי חיובי, וכן $g \circ f^{-1}\left(0\right) = 0$, ומכאן מתרגיל בית נקבל שהפונקציה $g \circ f^{-1}$ היא הזהות.

2 טורי לורן

ראינו שאם f אנליטית בטבעת $T_{r,R} = \left\{r < |z - z_0| < R\right\}$, אזי ניתן לפתח אותה שם לטור לורן:

$$f\left(z\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

וניתן לחשב את המקדמים על ידיד לקיחת γ מעגל וחישוב:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f\left(w\right)}{\left(w - z_0\right)^{n+1}} \, \mathrm{d}w$$

החלק החיובי של הטור מתכנס במידה שווה על $|z - z_0| < R$, והחלק השלילי מתכנס במידה שווה על $|z - z_0| > r$. המקרה החשוב ביותר הוא כאשר $r = 0$, כלומר z_0 היא נקודה סינגולרית שבסביבה מנוקבת שלה f אנליטית. במקרה זה $a_{-1} = \mathrm{Res}\left(f, z_0\right)$. כעת נמשיך לדון בסוגים של נקודות סינגולריות. נניח כי f אנליטית בסביבת z_0 אך לא מוגדרת בנקודה עצמה.

1. z_0 סליקה ־ ניתן להגדיר את f בנקודה z_0 כך שתהיה אנליטית גם שם. זוהי בדיוק האפשרות בה כל המקדמים השליליים בטור לורן מתאפסים.

2. z_0 קוטב ־ רק מספר סופי של מחוברים בטור לורן עם $n < 0$ לא מתאפסים. זה קורה אם ורק אם

$$\lim_{z \to z_0} f\left(z\right) = \infty$$

הוכחה: אם z_0 קוטב אז בסביבת z_0 נוכל לכתוב

$$f\left(z\right)=\sum_{n=1}^{k}a_{n}\left(z-z_{0}\right)^{-n}+g\left(z\right)$$

כאשר $g\left(z\right)$ הוא חלק חיובי אנליטי ובעל גבול בנקודה z_0. לכן, את החלק השלילי (המחובר השמאלי) אפשר לרשום כפולינום p לא קבוע במשתנה $\frac{1}{z-z_0}$, ולכן בהכרח קיים הגבול

$$\lim_{w\to\infty}p\left(w\right)=\infty$$

כעת ניקח $w=\frac{1}{z-z_0}$ ונקבל

$$\lim_{z\to z_{0}}p\left(\frac{1}{z-z_{0}}\right)=\infty$$

ולכן הכיוון הזה נכון. בכיוון השנית נניח שהגבול הוא אינסוף נגדיר $g\left(z\right)=\frac{1}{f(z)}$. מתקיים

$$\lim_{z\to z_{0}}g\left(z\right)=0$$

ולכן נוכל להגדיר $g\left(z_0\right)=0$ ולקבל אנליטיות של g בסביבת z_0 יחד עם רציפות בנקודה z_0. לכן היא אנליטית גם שם. כמובן, מהגדרת g היא לא זהותית אפס. נפתח אותה לטור חזקות:

$$g\left(z\right)=\left(z-z_{0}\right)^{k}\varphi\left(z\right)$$

כאשר $\varphi\left(z_0\right)\neq0$. כעת,

$$f\left(z\right)=\frac{1}{g\left(z\right)}=\frac{1}{\left(z-z_{0}\right)^{k}}\frac{1}{\varphi\left(z\right)}$$

כמובן, $\frac{1}{\varphi}$ גם אנליטית בסביבת z_0, כי היא לא מתאפסת שם. לכן נוכל לכתוב

$$f\left(z\right)=\left(z-z_{0}\right)^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}\left(z-z_{0}\right)^{n}=\sum_{n=-k}^{\infty}b_{n+k}\left(z-z_{0}\right)^{n}$$

■

3. z_0 סינגולריות עיקרית - הגבול בנקודה z_0 לא קיים. זה חייב להתאים לאפשרות שבה יש אינסוף מחוברים שליליים בטור.

אלה הן גם שלושת האפשרויות המתאימות למשפט קסוראטי־ויירשטראס.

הגדרה 2.1 יהי U תחום. פונקציה f על U נקראת מרומורפית (ובהרבה מקומות אנליטית נקראת הולומורפית) אם לכל נקודה $z_0 \in U$ ישנה סביבה מנוקבת שבה f אנליטית, והנקודה z_0 עצמה היא סליקה או קוטב (אבל לא סינגולריות עיקרית).

מקובל גם לדבר על מיון הסינגולריות של f בנקודה ∞ (בתנאי שהיא מוגדרת עבור $|z| > R$, כאשר R גדול מספיק). מיון הסינגולריות באינסוף מוגדר על ידי הסינגולריות של $f\left(\frac{1}{z}\right)$ בנקודה $z = 0$. חשוב לזכור: עבור f מרומורפית, קבוצת האפסים והקטבים היא קבוצה מבודדת (ללא נקודת הצטברות בתוך U). במילים אחרות, בכל קומפקט $K \subseteq U$ יש לפונקציה f רק מספר סופי של נקודות שבהן היא מתאפסת או סינגולרית. השיקול הוא סטנדרטי ־ לכל $z_0 \in K$ יש סביבה שבה z_0 היא היחידה שבה לפונקציה יש 0 או קוטב (אם בכלל z_0 הוא כזה). **הוכחה:** מפתחים לטור לורן סביב z_0. מההנחה שזו קוטב, אפשר לכתוב

$$f\left(z\right) = \frac{\varphi\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)^k}$$

כאשר φ אנליטית ולא מתאפסת בסביבת z_0 ולכן בסביבה מספיק קטנה של z_0 הן המונה והן המכנה לא מתאפסים ולא שואפים לאינסוף. ■

כל התורה עוברת להקשר של פונקציות מרומורפיות, עם ההתאמות המתבקשות ־ למשל:

משפט 2.2 (פיקרד הקטן למרומורפיות) אם f מרומורפית על $\mathbb{C}$ ומפספסת 3 ערכים אזי היא קבועה.

מדוע זה גורר את משפט פיקרד הקטן? על פונקציה אנליטית נחשוב כפונקציה אנליטית שמפספסת את ∞. משפט פיקרד לאנליטיות גם הוא גורר את הגרסה המרומורפית: אם אחד משלושת הערכים המפוספסים הוא אינסוף, אז זה בדיוק משפט פיקרד הקטן לאנליטיות. אחרת, f מרומורפית ומפספסת 3 ערכים סופיים (בלי הגבלת הכלליות אפס הוא אחד מהם על ידי הזזה). נגדיר $g\left(z\right) = \frac{1}{f(z)}$, שתפספס את אינסוף ועוד שני ערכים. לכן היא אנליטית, ונפעיל את פיקרד הקטן כדי לסיים.

דוגמאות למיון של נקודות סינגולריות:

1. $f\left(z\right) = \frac{e^z - 1}{z}$ בנקודה $z_0 = 0$ ־ במונה אי גורם חופשי בפיתוח לטור חזקות, ולכן המונה לא תהרוס. לכן $z_0 = 0$ היא סינגולריות סליקה. מה קורה בנקודה ∞? זוהי נקודה סינגורית עיקרית, על ידי הסתכלות על $f\left(\frac{1}{z}\right)$.
2. הנקודה ∞ היא קוטב של כל פולינום.