תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

15 ביוני 2017

1 משפט ההעתקה של רימן

היינו באמצ עההוכחה של המשפט:

משפט 1.1 יהי $U \neq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר לפונקציות. אזי U שקול קונפורמית לדיסק D, כלומר קיימת $f: U \to D$ חד־חד־ערכית ועל ואנליטית.

הוכחה: בשלב הראשון בחרנו $z_0 \neq w_0$, והגדרנו $\mathcal{F}$ את משפחת הפונקציות $f: U \to D$ החד־חד־ערכיות עם $f(w_0) = 0$. אזי $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (מתכונת השורש הריבועי). מתוכה מצאנו f_0 עבורה $|f_0(z_0)|$ מקסימלי.

כעת נמשיך. נראה שהפונקציה f_0 היא בהכרח על ולכן נסיים. שלב זה שוב משתמש בתכונת השורש הריבועי ־ נשים לב שאם U, V שקילות קונפורמית ולתחום U יש את תכונת השורש הריבועי, אזי גם לתחום V יש אותה. אכן, אם f השקילות הקונפורמית, φ על V שאינה מתאפסת, נגדיר $\psi = \varphi \circ f$ ־ גזירה כהרכבת גזירות ולא מתאפסת כי φ לא מתאפסת. היא מוגדרת על U, ששם מותר להוציא שורש $\sqrt{\psi}$ ואז קל לבדוק ישירות מההגדרה שמתקיים

$$\sqrt{\varphi} \coloneqq \sqrt{\psi} \circ f^{-1}$$

היא אכן שורש של φ.

נשוב להוכחה. נסמן $V = f_0(U)$. אזי בבירור $f_0: U \to V$ שקילות קונפורמית, ונרצה להראות כי $V = D$. אחרת, $V \subsetneq D$ ומקיים את תכונת השורש הריבועי, ואפשר להשתמש בתרגיל בית שראינו ־ תחת ההנחות הללו קיימת $r: V \to D$ כך שמתקיים $r(0) = 0$, r חד־חד־ערכית וכן $|r(z)| > |z|$ לכל $z \neq 0$. כעת, נביט בהעתקה $r \circ f_0 : U \to D$, שהיא חד־חד־ערכית כהרכבה של חד־חד־ערכיות, מקיימת $r \circ f_0(w_0) = r(0) = 0$, כלומר היא בתוך $\mathcal{F}$, וכן $|r \circ f_0(z_0)| > |f_0(z_0)|$ בסתירה למקסימליות של f בתוך $\mathcal{F}$. לכן $V = D$.
■

משפט 1.2 יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום. אזי התכונות הבאות שקולות.

1. U פשוט קשר מישורית (לא ניתן לכתוב $U^c = K \cup F$ כאיחוד זר כאשר K קומפקטית לא ריקה, F סגורה).
2. U פשוט קשר הומולוגית (לכל מסילה α עם $\mathrm{Im}\alpha \subseteq U$ ולכל $z \in U^c$ מתקיים $\mathrm{Ind}_\alpha(z) = 0$).

3. U פשוט קשר לפונקציות (לכל f אנליטית על U יש קדומה).

4. U מקיים את תכונת השורש הריבועי.

5. U פשוט קשר למסילות (כל לולאה היא כוויצה).

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: ראינו (פריקנו את המשלים לקבוצה קומפקטית של כל הנקודות שהאינדקס שלהן לא אפס, והקבוצה הסגורה של כל הנקודות שהאינדקס שלהן כן אפס).
$3 \Rightarrow 2$: ראינו (משפט קושי ההומולוגי אומר שלכל מסילה α בתוך U האינטגרל של f עליה הוא 0 - ולכן יש לה קדומה).
$4 \Rightarrow 3$: ראינו (בשיעור שעבר, דרך הגדרת לוגריתם לפונקציה שלא מתאפסת).
$5 \Rightarrow 4$: ממשפט ההעתקה של רימן (שבסופו של דבר משתמש רק בה, ולא בפשטות קשר לפונקציות) קיימת $f : U \to D$ אנליטית, חד־חד־ערכית ועל, שבעזרתה אפשר לתרגם הומוטופיות בתוך D להומוטופיות בתוך U. D הוא כמובן פשוט קשר למסילות, ולכן זה נובע.
$2 \Rightarrow 5$: ראינו (וזה ברור - ההומוטופיה לא נוגעת בנקודה $z \in U^c$).
$1 \Rightarrow 2$: היה בתרגיל בית (קל אבל טכני). ■

הערה 1.3 בהוכחת משפט רימן אפשר להראות שהתנאי הנוסף $f'(w_0) > 0$ (ממשי חיובי) מגדיר את f באופן יחיד.

2 טורי לורן

נניח כי f אנליטית בתחום U שמכיל טבעת (לשם הנוחות נניח סביב 0). הטבעת היא

$$T_{r,R} = \{r < |z| < R\}$$

יותר מאוחר נתעניין גם במקרה של $r = 0$. ניקח לנו $r < r_1 < R_1 < R$, ונסמן $\alpha_{R_1}, \alpha_{r_1}$ את מסילות המעגל בדיוס R_1, r_1 סביב 0. בדיוק כמו בדיון שהוציא את נוסחת קושי והפיתוח לטור חזקות, נקבע $z \in T_{r_1,R_1}$ ונגדיר

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

אזי g גזירה בכל T_{r_1,R_1} ללא z, ורציפה גם בנקודה z, ולכן כפי שראינו בעבר היא גזירה שם. בניגוד לדיון הקודם, לא נוכל לומר שמתקיים

$$\int_{\alpha_{R_1}} g(w)\, \mathrm{d}w = 0$$

כי בסביבת 0, f, g לא מוגדרותץ מכיוון שמהסילה החיצונית והפנימית הן הומוטופיות בתוך U, כן מתקיים

$$\int_{\alpha_{r_1}} g(w)\, \mathrm{d}w = \int_{\alpha_{R_1}} g(w)\, \mathrm{d}w$$

ואת זה ננצל כדי לפתי את f לטור חזקות (טור לורן ־ יהיו בו גם חזקות שליליות).

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - 2\pi i f(z) \\
\int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}z = \\
&= \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

השתמשנו כן בכך שהנקודה z היא בתוך המסילה הגדולה (ולכן האינדקס שלה הוא 1) ומחוץ למסילה הקטנה (ולכן האינדקס שלה הוא 0). נשווה ונקבל

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right)$$

את המחובר הראשון בסוגריים אפשר לפתח לטור חזקות רגיל בנקודה z, בדיוק כפי שעשינו כשפיתחנו f גזירה לטור חזקות:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$$

וטור זה מתכנס במידה שווה על w לכל z קבוע, ולכן נוכל לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

וזה מתכנס על $|z| < R_1$ (וזאת לכל $R_1 < R$, ולכן על $|z| < R$) לפחות. נעבור לדון במחובר השני, שבו דווקא $\left|\frac{w}{z}\right| < 1$ ולא להיפך:

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\frac{f(w)}{z}\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$$

ושוב לכל z קבוע הטור מתכנס במידה שווה על w, ולכן נוכל לבצע אינטגרציה איבר איבר. בסך הכל נקבל, אחרי שילוב של השניים:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w + \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)$$

נשים לב שאינטגרציה על שתי המסילות זהה, כי הן הומוטופיות בתחום U, ולכן בסך הכל נכתוב:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)z^{n}$$

החלק השלילי של החזקות ($n<0$) נקרא גם החלק העיקרי. נשים לב שהסיתוח לטור לורן הוא יחיד (החלק הקשה הוא הקיום) כי אם נתון פיתוח כה אז המקדמים ניתנים לחישוב על ידי האינטגרלים. נזכור שההתכנסות של הטור החיובי היא במידה שווה על קופקטיות על $|z|<R$, והחלק השלילי מתכנס במידה שווה על קומפקטיות בתחום $|z|>r$. בסך הכל היא במידה שווה על קומפקטיות על הטבעת כולה $T_{r,R}$. המקדם a_{-1} הוא חשוב במיוחד - זו השארית של f (במקרה שלנו בנקדה 0). כנראה המקרה המעניין ביותר הוא של נקודה סינגולרית, כאשר f אנליטית בסביבה מנוקבת שלה, ואז מקבלים פיתוח של f לטור לורן סביב הנקודה. במקרה הזה אומרים שהנקודה היא סליקה אם החלק העיקרי הוא 0, קוטב אם הילק העיקרי סופי, או נקודה סינגולרית עיקרית אם החלק העיקרי אינסופי. אפשר כמובן לפתח את הטור סביב כל נקודה z_0.