תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

11 ביוני 2017

ראינו כי משפט מונטל גורר את משפט פיקרד הגדול, שגורר את משפט פיקרד הקטן. ראינו שעיקרון בלוך חוזה שגם פיקרד הקטן גורר את משפט מונטל, אבל אנחנו לא יודעים בוודאות מתי אפשר להשתמש בעקרון של בלוך. לצורך זה יש למה נהדרת של זלצמן, שאנחנו לא נוכיח, אבל מאפשרת להשתמש בעקרון של בלוך.

משפט 0.1 (למת זלצמן) יהי U תחום, ותהי $\mathcal{F}$ משפחה של פונקציות אנליטיות על U שאינן נורמליות. אזי קיימת סדרת פונקציות $f_n \in \mathcal{F}$, קיימת $z_0 \in U$ וקיימת סדרה $z_n \in U$ עם $z_n \to z_0$ וסדרת r_n עם $r_n \to 0$ כך שסדרת הפונקציות

$$g_n\left(w\right) = f_n\left(z_n + r_n w\right)$$

שואפת במידה שווה על קומפקטיות לפונקציה שלמה ולא קבועה.

טענה 0.2 הלמה של זלצמן מראה שמשפט פיקרד הקטן גורר את משפט מונטל.

הוכחה: נניח בשלילה שמשפט מונטל לא נכון כלומר המשפחה $\mathcal{F}$ של הפונקציות שמפספסות על U את a, b אינה נורמלית. נביט בסדרה g_n מהלמה של זלצמן. נשים לב שגם g_n מפספסות את a, b, כי הן מוגדרות על ידי f_n שמפספסות אותם. לכן גם g, הפונקציה הגבולית שאינה קבועה, תפספס את a, b (ממשפט הורוויץ). זו כמובן סתירה למשפט פיקרד הקטן. ■

1 משפט ההעתקה של רימן

משפט 1.1 (רימן) יהי U תחום פשוט קשר לפונקציות, וכן $U \neq \mathbb{C}$. אזי קיימת פונקציה אנליטית חד־חד־ערכית ועל $f : U \to D$, כאשר $D = B_1\left(0\right)$ כרגיל.

הגדרה 1.2 f אנליטית, חד־חד־ערכית ועל בין שני תחומים נקראת <u>שקילות קונפורמית</u> (ברור מחד־חד־ערכיות שהנגזרת לא מתאפסת, ולכן f^{-1} תהיה שקילות בכיוון השני).

הערה 1.3 $\mathbb{C}, D$ לא שקולים קונפורמית ־ ממשפט ליוביל כל פונקציה $f : \mathbb{C} \to D$ אנליטית היא קבועה.

נזכור שהוכחנו שאם U פשוט קשר לפונקציות, אזי לכל פונקציה אנליטית שאינה מתאפסת על U אפשר להוציא $\log$ אנליטי, ולכן בפרט יש לתחום U את תכונת השורש הריבועי ־ לכל $f \neq 0$ על U אפשר להוציא שורש ריבועי אנליטי.

טענה 1.4 (קלה) אם U,V שקולים קונפורמית (כלומר קיימת f שהיא שקילות קונפורמית) אז אם לאחד יש את תכונת השורש הריבועי אז גם לשנייה יש (נראה את ההוכחה של זה בשיעור הבא או בתרגול).

הוכחה: (של משפט רימן) להוכחה שלושה שלבים. בוחרים שתי נקודות שונות $z_0 \neq w_0 \in U$.

1. ראשית מראים שקיימת פונקציה אנליטית חד־חד־ערכית $f : U \to D$ עם $f\left(w_0\right) = 0$.
2. תהי $\mathcal{F}$ משפחת כל הפונקציות שמקיימות את שלב 1. אזי קיימת שם $f \in \mathcal{F}$ שמביאה את הערך $\left|f\left(z_0\right)\right|$ למקסימום מבין כל הפונקציות בתוך $\mathcal{F}$.
3. מראים כי f משלב 2 היא גם על, ולכן נותנת את הנדרש.

כעת נראה כל חלק כזה.

1. יהי $a \notin U$ (מההנחה $U \neq \mathbb{C}$). נתבונן בפונקציה $g\left(z\right) = z - a$ ־ היא חד־חד־ערכית ולא מתאפסת על U. לכן קיימת h אנליטית עם $h = \sqrt{g}$. ברור כי h חד־חד־ערכית גם כן. כעת, מהאנליטיות, h פתוחה ־ כלומר הטווח שלה מכיל כדור $B_r\left(p\right)$ סביב הנקודה p ברדיוס r. זה אומר שהטווח של h לא נוגע בכדור $B_r\left(-p\right)$ ־ כי אחרת כשנעלה בריבוע נקבל סתירה לחד־חד־ערכיות של g. לכן, נקבל כי הטווח של h מפספס את הכדור $B_r\left(-p\right)$, ונביט בפונקציה
$$\varphi\left(z\right) = \frac{1}{h\left(z\right) + p}$$
נזכור כי $\left|h\left(z\right) + p\right| \geq r$ (זה מה שהרגע ראינו), ולכן $\left|\varphi\left(z\right)\right| \leq \frac{1}{r}$. כמובן, גם φ חד־חד־ערכית. לבסוף, ננרמל את φ על ידי כפל פי r (אפשר להפחית ε כדי לוודא ליפול בתוך D), כך שערכיה של הפונקציה החדשה ψ יהיו בתוך D. אם $\psi\left(w_0\right) \neq 0$, נרכיב אותה עם העתקת מביוס של $D \to D$ (מהצורה φ_a) כך שנקבל גם את התנאי הזה (עבור $a = \psi\left(w_0\right)$).
2. נסמן
$$m = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left|f\left(z_0\right)\right| \leq 1$$
מהגדרת הסופרימום, קיימת סדרת $f_n \in \mathcal{F}$ עם $\left|f_n\left(z_0\right)\right| \to f_n$. נשים לב שכל f_n היא אל תוך D, ולכן חסומה על ידי 1. לכ ןנקבל חסימות במידה אחידה של $\mathcal{F}$. מטענת מונטל נקבל כי $\mathcal{F}$ משפחה נורמלית, ולכן קיימת תת סדרה של f_n שמתכנסת במידה שווה לאיזושהי f_0 על D. מההגדרה, ברור כי $m = \left|f_0\left(z_0\right)\right|$. עם זאת, יש לבדוק כי $f_0 \in \mathcal{F}$. ראשית, וודאי $f_0\left(w_0\right) = 0$, וכן $f_0\left(z_0\right) \neq 0$ (כי $\left|f_0\left(z_0\right)\right| = m > 0$). לכן f_0 לא קבועה. נזכור שאם $f_n \to f_0$ במידה שווה על קופקטיות וכל f_n היא חד־חד־ערכית, אזי f_0 היא קבועה או חד־חד־ערכית (משפט הורוויץ). לכן היא בהכרח חד־חד־ערכית. כל שנותר לוודא כעת הוא שתמונת f_0 באמת מוכלת בתוך D (ואין ערך שבורח לשפה). וודאי מתקיים $\left|f_0\left(z\right)\right| \leq 1$ לכל $z \in U$, אבל אם המקסימום היה מתקיים זה היה סותר את עקרון המקסימום, כי f_0 לא קבועה.
3. נראה בשיעור הבא.

■