תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

8 ביוני 2017

1 משפטי פיקרד

ראינו את המשפט הקטן:

משפט 1.1 (פיקרד הקטן) f שלמה לא קבועה יכולה לפספס רק ערך אחד.

> "אם יש משפט קטן, אז בטח יש גם משפט גדול" - המרצה

משפט 1.2 (פיקרד הגדול) נניח כי f אנליטית בסביבה מנוקבת U של נקודה p (נקודה סינגולרית). נניח כי הגבול של f בנקודה p לא קיים במובן הרחב (לא סופי ולא אינסוף). אזי למעט אולי ערך אחד, f מקבלת את כל הערכים אינסוף פעמים.

> "אם לדבר רגע בנוסח שאלות פסיכומטרי, פיקרד הקטן הוא לליוביל כמו שפיקרד הגדול הוא לקסוראטי ויירשטראס" - המרצה

תרגיל הסיקו מפיקרד הגדול שאם f שלמה ואינה פולינום אזי למעט אולי ערך אחד, f מקבלת כל ערך אינסוף פעמים (רמז: מביטים בפונקציה $f\left(\frac{1}{z}\right)$).

בהוכחת משפט פיקרד הקטן הסתמכה על משפט מעניין וחשוב שעוד לא הוכחנו:

משפט 1.3 (לנדאו בלוך) נניח כי f אנליטית בתחום $D=B_1(0)$ עם $|f'(0)|=1$, אזי הטווח של f מכיל גדור ברדיוס $\frac{1}{40}$ לפחות (ידוע שהקבוע האופטימלי בתחום $0,43\le C\le 0.47$).

הוכחה: נשתמש בתרגיל בית שהיה לנו. נניח כי $|f'(z)|\le 2|f'(z_0)|$ לכל $z\in B_r(z_0)$. אזי $f(B_r(z_0))$ מכיל כדור ברדיוס לפחות $\frac{1}{20}r|f'(z_0)|$.

כעת, בהינתן f כמו במשפט נוכל להניח כי f מוגדרת בתוך $B_{1+\varepsilon}(0)$ עבור $\varepsilon>0$ שרירותי כדי לקבל אותה מסקנה (ואז לוקחים גבול עם $\varepsilon\to 0$).

נביט בפונקציה

$$\varphi(z)=|f'(z)|(1-|z|)$$

שמוגדרת על $\overline{D}=\overline{B}_1(0)$. זו פונקציה רציפה (וכמובן לא אנליטית) על D, ולכן היא מקבלת מקסימום, נניח בנקודה z_0. ראשית, אם $|z|=1$, אזי $\varphi(z)=0$, וכמובן שלכל z מתקיים $\varphi(z)\ge 0$. לכן נקבל מקסימום בפנים הדיסק. כמו כן, $\varphi(0)=1\cdot 1=1$ ולכן

$\varphi(z_0) \geq 1$. נגדיר כעת $r = \frac{1-|z_0|}{2}$ ונראה כי r, z_0 מקיימים את תנאי תרגיל הבית. לכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים $\varphi(z) \leq \varphi(z_0)$, כלומר

$$|f'(z)|(1-|z|) \leq |f'(z_0)|(1-|z_0|)$$
$$|f'(z)| \leq \frac{1-|z_0|}{1-|z|}|f'(z_0)|$$

מהגדרת r נקבל שהמקדם של $|f'(z_0)|$ הוא לכל היותר 2. לכן אנחנו אכן עומדים בתנאים. נקבל שתמונת f מכילה כדור ברדיוס לפחות

$$\frac{1}{20}r|f'(z_0)| = \frac{1}{20}\frac{1-|z_0|}{2}|f'(z_0)| = \frac{1}{40}\varphi(z_0) \geq \frac{1}{40}$$

■

2 משפחות נורמליות

הגדרה 2.1 יהי U תחום, ותהי $\mathcal{F}$ משפחה (קבוצה) של פונקציות אנליטיות על U, אומרים שהיא נורמלית אם לכל סדרה $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ מתקיים אחד משני הבאים:

1. אפשר להוציא תת סדרה שמתכנסת במידה שווה על קומפקטיות בתחום U (לא מניחים דבר על הגבול).

2. קיימת תת סדרה שמתכנסת לאינסוף במידה שווה על קומפקטיות, משמע לכל קבוצה קומפקטית $K \subseteq U$ ולכל $R > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים לכל $z \in K$:

$$|f_n(z)| > R$$

דוגמה נביט במשפחת הפונקציות $f_n(z) = nz$. אם $0 \in U$ היא נורמלית כי תמיד יש שאיפה במידה שווה על קומפקטיות לאינסוף. אם $0 \in U$, המשפחה לא נורמלית, כי $f_n(0) = 0$.

נרצה כעת לתת את טענת מונטל, שהיא חשובה בנושא זה. לשם זה ננסח את משפט ארצלה אסקולי, שאולי לא ראינו בעבר אבל ההוכחה שלו לחלוטין אלמנטרית (אפשר היה להוכיח בחדו"א 2).

משפט 2.2 (ארצלה אסקולי) יהי X מרחב מטרי קומפקטי, ותהי f_n סדרת פונקציות רציפות על X שמקיימת את התנאים הבאים:

1. חסימות במידה אחידה, כלומר קיים M כך שלכל n מתקיים $|f_n| \leq M$.

2. רציפות במידה אחידה, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כל שלכל n ולכל $x, y \in X$ מתקיים

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

אזי יש תת סדרה של f_n שמתכנסת במידה שווה.

משפט 2.3 (טענת מונטל) יהי U תחום ותהי $\mathcal{F}$ משפחה של פונקציות כך שעל כל קומפקטית $K \subseteq U$ המשפחה חסומה במידה אחידה, כלומר קיים $M\left(K\right)$ כל שלכל $f \in \mathcal{F}$ ולכל $z \in K$ מתקיים

$$\left|f\left(z\right)\right| \leq M\left(K\right)$$

אזי $\mathcal{F}$ נורמלית.

הוכחה: למעשה נתון לנו התנאי הראשון של משפט ארצלה אסקולי, ונרצה להראות את השני. נזכור שאם f אנליטית בתחום U שמכיל את הקטע $[p,q]$ וכן לכל $z \in [p,q]$ מתקיים

$$\left|f'\left(z\right)\right| \leq M$$

אזי

$$\left|f\left(q\right)-f\left(p\right)\right| = \int\limits_{p}^{q} f'\left(z\right)\,\mathrm{d}z \leq \left|p-q\right| \max_{z\in[p,q]} \left|f'\right| \leq M\left|p-q\right|$$

לכן ברור שאם בתוך U מתקיים $\left|f'\right| \leq M$ אזי בהכרח

$$\left|f\left(p\right)-f\left(q\right)\right| \leq M\left|p-q\right|$$

ולכן נוכל לקחת $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ ולקבל רציפות במידה אחידה (אלה פונקציות ליפשיציות עם קבוע M). קיבלנו שרציפות במידה אחידה מובטחת מתוך חסימות במידה אחידה כאשר הפונקציות אנליטיות.

כעת, נעבור להוכחה עצמה. נניח ראשית כי $U = B_r\left(0\right)$ עבור $r > 1$. נרצה להוכיח שלכל $\left(f_n\right) \subseteq \mathcal{F}$ יש תתסדרה שמתכנסת במידה שווה על $\overline{D} = \overline{B}_1\left(0\right)$. על ידי החלפת U בתחום $\overline{B}_{\frac{1+r}{2}}\left(0\right)$ נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות כי $\left|f\right| \leq M$ לכל $f \in \mathcal{F}$ (כי $\mathcal{F}$ חסומה במידה אחידה על הקומפקטית $\overline{B}_{\frac{1+r}{2}}\left(0\right)$). כדי להשתמש בארצלה אסקולי עבור $\overline{D}$ מספיק, כפי שראינו, להראות כי f' חסומה במידה אחידה. ניקח מעגל γ ברדיוס $\frac{1+r}{2}$ סביב 0, ונזכר בנוסחת קושי לנגזרת:

$$f'\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

ומכאן

$$\left|f'\left(z\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\left(\frac{r-1}{2}\right)^2} L\left(\gamma\right)$$

וזה קבוע, כלומר יש לנו חסימות במידה אחידה של f'. כיוון שהתחום קמור, נקבל רציפות במידה אחידה, ואז הטענה שלנו נובעת ממשפט ארצלה אסקולי ישירות.

נובע כעת ישירות על ידי שימוש בהזזה ונרמול מחדש של הפונקציות שהטענה נכונה לכל כדור. לכן בהנחות של טענת מונטל, לכל נקודה $z_0 \in U$ קיימת סביבה וקיימת תת סדרה של f_n שמתכנסת עליה במדיה שווה (בשלב הראשון הראינו עבור $z_0 = 0$ והסביבה D). מכאן, אם ניקח $K \subseteq U$ וסדרה f_n, אזי קיים $M(K)$ שחוסם במידה אחידה אם $|f_n|$ על K, ואז לכל $z_0 \in K$ יש סביבה ותת סדרה שמתכנסת במידה שווה על הסביבה הזו. מקופקטיות K, נוכל לכסות אותה עם מספר סופי של סביבות כללו, ואז נעבור בכל פעם לתת סדרה שמתכנסת על סביבה נוספת מתוכן. תוך מספר סופי של מעבריםלתתי סדרות נקבל תת סדרה שמתכנסת במידה שווה על כל K.

עד עכשיו הצלחנו להראות שלכל קבוצה קומפקטית יש תת סדרה שמתכנסת עליה במידה שווה. אנחנו צריכים תת סדרה שתתכנס על כל קומפקטית במידה שווה. לשם כך, נגדיר לכל m טבעי

$$K_m = \left\{ z \in U \mid |z| \leq m, d(z, U^c) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

נשים לב שכל K_m קומפקטית - אם $x_i \in K_m$, מחסימות יש לה תת סדרה מתכנסת $x_i \to y$, ונשים לב שאז $|y| \leq m$ וגם $d(y, U^c) \geq \frac{1}{m}$ ואז $y \in K_m$ (אם $U = \mathbb{C}$ אפשר להימנע מבעיות על ידי השמטת התנאי על המרחק מהמשלים). ברור שמתקיים $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ וכן לכל קבוצה קומפקטית $K \subseteq U$ קיימת K_j שמכילה אותה עבור j גדול מספיק. לכן אם נראה שכל f_n נית ןלמצוא תת סדרה שמתכנסת במדיה שווה על כל K_m ונסיים את ההוכחה.

תהי עתה f_n סדרת פונקציה חסומה במידה אחידה ע לקומפקטיות כמו בטענת מונטל. ידוע לנו כבר שעל כל קומפקט אפשר למצוא תת סדרה מתכנסת. נבצע תהליך אלכסון של קנטור לסדרת הקבוצות $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$.עבור K_1 ידוע שקיימת תת סדרה $(f_{1,k})$ שמתכנסת במידה שווה עליה. ממשיכים עם סדרה זו, ומוציאים ממנה תת סדרה $(f_{2,k})$ שמתכנסת במידה שווה על K_2. נמשיך כך לכולן, ונקבל מטריצה של פונקציות:

$$\begin{matrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

ניקח כעת את הסדרה $(f_k) = (f_{k,k})$, ונטען שהיא תעבוד. היא מתכנסת במידה שווה על K_m, כי למעט $m-1$ האיברים הראשונים בה, כל האיברים הם מתוך תת סדרה שנבחרה כמתכנסת במידה שווה על K_m. לכן אכן הצלחנו. ∎

2.1 עקרון בלוך

העיקרון הזה לא תמיד מתקיים. תהי P תכונה של פונקציות אנליטיות. אם כל פונקציה שלמה בעלת התכונה P היא קבועה, אזי נצפה שלכל תחום U, משפחת הפונקציות בעלות התכונה P היא נורמלית.

דוגמאות במשפט ליוביל רואים שכאשר P היא התכונה של חסימות, כל פונקציה שלמה בעלת התכונה P היא קבועה. טענת מונטל היא התממשות של עקרון בלוך במקרה זה - כאשר החסימות נלקחת במידה אחידה.

נוכל להחיל זאת על משפט פיקרד הקטן, בו P היא התכונה של לפספס שני ערכים (למשל 0,1). במצב זה, העיקרון של בלוך צופה את המשפט הבא:

משפט 2.4 (משפט מונטל) יהי U תחום, ויהיו $a \neq b$. תהי $\mathcal{F}$ משפחת כל הפונקציות האנליטיות על U שמפספסות את הערכים a, b. אזי $\mathcal{F}$ נורמלית.

את ההוכחה של זה נראה בהמשך, אבל כעת נראה שימוש נחמד:

טענה 2.5 משפט מונטל גורר את משפט פיקרד הגדול.

הוכחה: כרגיל, נוכיל הלניח בלי הגבלת הכלליות כי f אנליטית בתחום $D\backslash\{0\}$, ונרצה להוכיח שאם f מספספת שני ערכים, נניח $0, 1$, אזי הגבול באפס בהכרח קיים. נניח שהוא לא קיים. לכן קיימת סדרת $z_n \to 0$ עם $|f(z_n)| \leq M$ חסם אחיד (אחרת הגבול היה אינסוף). בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי $|z_n|$ מונוטונית יורדת וכן $|z_1| < \frac{1}{2}$. נגדיר

$$\alpha_n = 2z_n$$

ונביט בסדרת הפונקציות $f_n(z) = f(\alpha_n z)$. הנחנו שהפונקציה f פספסה שני ערכים נתונים, ונובע שגם f_n מפספסות את הערכים הללו. ממשפט מונטל f_n היא נורמלית, כלומר יש לה תת סדרה שמתכנסת במידה שווה לאינסוף או לפונקציה $g(z)$ שהיא אנליטית על D. נשים לב כי

$$\left|f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = |f(z_n)| \leq M$$

ולכן אין שאיפה לאינסוף. לכן ניקח את הפונקציה הגבולית g. ניקח כעת

$$K = \max_{|z|=\frac{1}{2}} |g(z)|$$

כעת, $f_n \to g$ במידה שווה (אחרי מעבר לתת סדרה) על $\left\{|z| = \frac{1}{2}\right\}$. נובע שלכל n גדול מספיק מתקיים

$$\left|f_n\left(|z| = \frac{1}{2}\right)\right| \leq K + 1$$

והרי

$$f_n\left(|z| = \frac{1}{2}\right) = f\left(|z| = \frac{\alpha_n}{2}\right) = f(|z| = |z_n|)$$

על כל מעגל קיבלנו $|f| \leq K + 1$, ולכן מעיקרון המקסימום נובע שבכל טבעת גם כן f חסומה על ידי $K + 1$. לכן הצלחנו להשיג שבסביבה שלמה של 0 יש חסימות $|f| \leq K + 1$, ומממשפט רימן נקבל כי 0 נקודת סינגולריות סליקה - בסתירה להנחה שלא קיים הגבול. ■