תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

19 במרץ 2017

1 קשירות

משפט 1.1 הישר הממשי $\mathbb{R}$ הוא קשיר, במובן הבא: לא קיימת בתוך $\mathbb{R}$ תת קבוצה $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{R}$ שהיא פתוחה וגם סגורה. באופן שקול, לא ניתן להציג את $\mathbb{R}$ כאיחוד זר של שתי קבוצות פתוחות לא ריקות, או כאיחוד זר של שתי קבוצות סגורות לא ריקות.

הוכחה: נניח כי U, V לא ריקות, פתוחות וזרות, כאשר $R = U \cup V$. נגדיר את הפונקציה המציינת את U:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \notin U \iff x \in V \end{cases}$$

נשים לב שהפונקציה שלנו רציפה. היא רציפה בכל U כי U פתוחה, ולכן יש סביבה שלמה של x שעדיין בתוך U, ועליה f קבועה 1. בדיוק מאותה סיבה, f רציפה בכל נקודה $x \in V$ (גם V פתוחה). כאן כמובן שהערך הקבוע של f הוא 0. לכן בסך הכל f רציפה בכל $\mathbb{R}$. כיוון שאותן U, V לא ריקות, יש נקודות x, y עבורן $f(x) = 0, f(y) = 1$, וממשפט ערך הביניים קיימת נקודה בה f מקבלת את הערך $\frac{1}{2}$ - בסתירה להגדרה. ■

נרצה להשתמש במושג הקשירות עבור קבוצות שהן פתוחות או סגורות בתוך $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

הגדרה 1.2 $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה תקרא קשירה אם היא אינה איחוד זר של קבוצות פתוחות לא ריקות. $F \subseteq \mathbb{C}$ סגורה תיקרא קשירה אם היא אינה איחוד זר של קבוצות סגורות לא ריקות.

הגדרה 1.3 קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ נקראת קשירה מסילתית אם לכל $z, w \in A$ קיימת פונקציה רציפה (מסילה)

$$\varphi : [0,1] \to A$$

המקיימת $\varphi(0) = z$, $\varphi(1) = w$.

משפט 1.4 תהי $A \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה או סגורה, וקשירה מסילתית. אזי A קשירה.

הוכחה: נניח כי למשל A פתוחה, וכי $A = U \cup V$, כאשר U, V פתוחות, זרות ולא ריקות. נבחר $z \in U, w \in V$. מההנחה, קיימת מסילה $\varphi : [0,1] \to A$, עם $\varphi(0) = z$, $\varphi(1) = w$,

נרחיב את φ לפונקציה רציפה $\tilde{\varphi}:\mathbb{R}\to A$ על ידי שנגדיר

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases} z & t<0\\ \varphi(t) & t\in[0,1]\\ w & t>1\end{cases}$$

נשתמש בהגדרה השקולה של רציפות - המקור ההפוך תחת $\tilde{\varphi}$ של כל קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה. אזי

$$\varphi^{-1}(U)=I,\varphi^{-1}(V)=J$$

גם כן קבוצות פתוחות, ולא ריקות מבניית $\tilde{\varphi}$. הן זרות בגלל זרות U,V, וכמובן שהאיחוד שלהן הוא $\mathbb{R}$ - תמונת $\tilde{\varphi}$ מוכלת בתוך A. זו סתירה לקשירות $\mathbb{R}$ שהוכחנו קודם.

ההוכחה במקרה בו A סגורה היא אנלוגית. ■

הגדרה 1.5 תחום בתוך $\mathbb{C}$ הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

טענה 1.6 אם U תחום אזי U קשיר מסילתית.

הוכחה: תהי $x_0\in U$ (אפשר להניח כי U לא ריקה). נביט בקבוצת כל הנקודות $y\in U$ שניתן לחבר לנקודה x_0 על ידי מסילה (העתקה רציפה מהישר הממשי למישור).

נסמן את הקבוצה הזו V. ברור כי V פתוחה: נניח כי $y\in V$. מפתיחות קיים כדור סביב y בתוך U. נוכל להמשיך את המסילה אל y לכל נקודה מהכדור, ואז כל נקודה בכדור נמצאת בתוך V.

בדיוק מאותו שיקול, גם המשלים של V פתוחה - אם $y\notin V$, אז אף נקודה בכדור סביבה לא יכולה להיות בתוך V - אחרת גם y הייתה בתוך V (כי היינו ממשיכים את המסילה). אבל כמובן V אינה ריקה, ולכן בהכרח $V^c=\emptyset$ - אחרת $U=V\cup V^c$ בסתירה לקשירות. לכן $U=V$ וסיימנו. ■

הגדרה 1.7 תהי $U\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה. נאמר כי U <u>פשוטת קשר מישורית</u> אם לא קיים פירוק של המשלים

$$U^c=F\cup K$$

כאיחוד זר של שתי קבוצות סגורות שבו K היא קומפקטית ולא ריקה.

דוגמאות נתבונן בכדור הפתוח סביב 0 ברדיוס 1. המשלים היא קבוצה קשירה מסילתית, ולכן קשירה, ולכן לא ניתנת להצגה כאיחוד של אף שתי קבוצות סגורות זרות ולא ריקות - בטח לא כשאחת מהן קומפקטית.

לעומת זאת, אם ניקח את אותו כדור, אבל נוציא ממנו את הראשית - אזי המשלים הוא כן איחוד זר כמו בהגדרה. F היא המשלים של כדור היחידה, בעוד K היא היחידון $\{0\}$, שכמובן קומפקטי. לכן כדור היחידה המנוקב אינו פשוט קשר מישורית.

דוגמא נוספת היא $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, שאינה פשוטת קשר מישורית - F ריקה, $K=\{0\}$.