תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

4 ביוני 2017

1 משפט פיקארד

אנחנו הולכים להתחיל לעבוד, כדי להוכיח את המשפט המדהים הבא:

משפט 1.1 (פיקארד) תהי f שלמה ולא קבועה. אזי הטווח שלה הוא $\mathbb{C}$ או $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ (כלומר f מפספסת לכל היותר ערך אחד).

לשם זה נצטרך כמה הכנות.

תזכורת תחום U נקרא פשוט קשר לפונקציות אם לכל f אנליטית על U יש פונקציה קדומה.

בפרט, ממשפט גורסה, כל תחום קמור הוא כזה, ועוד יותר בפרט, המישור $\mathbb{C}$ הוא כזה.

משפט 1.2 אם f אנליטית על U שהוא פשוט קשר לפונקציות, ואינה מתאפסת שם, אזי ניתן להגדיר את $\log f$ אנליטית על U.

הוכחה: נביט בפונקציה $\varphi\left(z\right)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. φ אנליטית כי f לא מתאפסת על U, ולכן מההנחה על U, קיימת h אנליטית על U המקיימת $h\left(z\right)=\varphi\left(z\right)$. נחשב את הנגזרת של הפונקציה

$$g\left(z\right)=e^{-h(z)}f\left(z\right)$$

ונקבל

$$g'\left(z\right)=-h'\left(z\right)e^{-h(z)}f\left(z\right)+e^{-h(z)}f'\left(z\right)=-\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}e^{-h(z)}f\left(z\right)+e^{-h(z)}f'\left(z\right)=$$
$$=0$$

אם כן, היות והתחום U קשיר, נקבל $g\left(z\right)=C$ קבועה. נסמן $C=e^{\alpha}$. אזי

$$e^{-h(z)}f\left(z\right)=e^{\alpha}$$
$$f\left(z\right)=e^{h(z)+\alpha}$$

ולכן $h\left(z\right)+\alpha$ הוא לוגריתם כמו שרצינו. ■

העובדה שמקומית ניתן להגדיר את $\log f$ אנליטית היא כללית ולא קשורה להנחה על U.

בפרט לתחום U יש את תכונות השורש הריבועי - לכל $f \neq 0$ אנליטית על U ניתן להוציא שורש אנליטי של f, כי

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$$

משפט 1.3 (לנדאו בלוך) קיים קבועה אבסולוטי C (ואנחנו נראה אפילו $C \geq \frac{1}{40}$) כך שלכל פונקציה f שהיא אנליטית בסביבה של $\overline{D} = \overline{B}_1(0)$ המקיימת $|f'(0)| = 1$, הטווח $f(D)$ מכיל כדור ברדיוס לפחות C.

את המשפט הזה נוכיח בשיעור הבא. בינתיים נשתמש בו קצת.

מסקנה 1.4 נניח כי f שלמה ולא קבועה. אזי הטווח של f מכיל כדורים ברדיוס גדול כרצוננו (במרכזים שונים בדרך כלל).

הוכחה: מכיוון שהפונקציה f אינה קבועה, קיימת נקודה $a \in \mathbb{C}$ עם $f'(a) \neq 0$. יהי $R > 0$, גדול כרצוננו, ונביט בפונקציה

$$g(z) = \frac{f(a+Rz)}{Rf'(a)}$$

שמקיימת

$$g'(0) = \frac{Rf'(a)}{Rf'(a)} = 0$$

היא כמובן אנליטית בכל $\mathbb{C}$, ולכן ממשפט לנדאו בלוך התמונה של g מכילה כדור ברדיוס לפחות C. לכן הטווח של f מכיל כדור ברדיוס לפחות $C \cdot R \cdot f'(a)$, שיהיה גדול כרצוננו.
■

הוכחה: (של משפט פיקארד בהינתן משפט לנדאו בלוך) ניקח f שלמה ונניח בשלילה שהיא מפספסת 2 ערכים $a \neq b$. נפעיל עליה פעולות כמו $\log$ כך שנקבל פונקציות שלמות שמפספסות יותר ויותר ערכים, עד שנקבל סתירה למסקנה של משפט לנדאו בלוך. במהלך כל ההוכחה הזו נעבוד עם פונקציות לא קבועות, בגלל שהפונקציה f לא קבועה, ולא נציין זאת כל הזמן.

ראשית, בלי הגבלת הכלליות, f מפספסת את $0, 1$ - אחרת ניקח במקום את $\frac{f(z)-a}{b-a}$. כעת, $\mathbb{C}$ פשוט קשר לפונקציות, ולכן יש $\varphi(z) = \log f(z)$, כלומר

$$e^{\varphi(z)} = f(z)$$

על כן φ מפספסת את כל הערכים $2\pi ik$, כאשר k שלם, כי f מפספסת את 1. אחרי חלוקת φ בקבוע נוכל להניח כי φ מפספסת את כל השלמים.

עדיין, φ מפספסת את $0, 1$, ולכן $\sqrt{\varphi(z)}, \sqrt{\varphi(z-1)}$ גם כן ניתנות להגדרה כפונקציות שלמות. לכן, נוכל להגדיר

$$h(z) = \sqrt{\varphi(z)} - \sqrt{\varphi(z) - 1}$$

ונשים לב שהפונקציה כזו מפספסת כל ערך מהצורה $\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$ עבור n טבעי ־ נניח שמתקיים

$$\sqrt{\varphi(z)}-\sqrt{\varphi(z)-1}=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$$

ניקח הופכי ונקבל

$$\sqrt{\varphi(z)}+\sqrt{\varphi(z)-1}=\sqrt{n}\mp\sqrt{n-1}$$

נחבר את שני השוויונות האלה ונקבל

$$\begin{aligned}2\sqrt{\varphi(z)}&=2\sqrt{n}\\ \varphi(z)&=n\end{aligned}$$

וזו סתירה. כמובן, גם $h(z)$ לא מתאפסת, כי אחרת נקבל

$$\begin{aligned}\sqrt{\varphi(z)}&=\sqrt{\varphi(z)-1}\\ 1&=0\end{aligned}$$

וזו כמובן סתירה. לכן, נוכל להגדיר שוב $g(z)=\log h(z)$ שלמה. נוכיח כי g סותרת את המסקנה האחרונה. g מפספת את כל הערכים מהצורה

$$2\pi ik+\log\left(\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}\right)$$

לכל $n\geq 1$ טבעי, k שלם (הלוגריתם הזה הוא ממשי). נביט בנקודות הממשיות $\log\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)$. נקודות אלה גדלות מונוטונית לפי n. נראה שההפרשים של כל שתי נקודות כאלה הם חסומים:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)-\log\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)&=\log\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)<\\ &<\log\left(\frac{2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n-1}}\right)<\\ &<\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\log\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\leq\log 3\end{aligned}$$

לכן ההפרשים בין הערכים הממשיים שמתקבלים בציר החיובי חסומים על ידי $\log 3$. בציר הממשי השלילי יש לנו את אותה תמונה, כאשר עובדים עם הנקודות עם סימן מינוס. לכן גם שם מקבלים ממשיים שליליים בהפרשים לכל היותר $\log 3$.

קיבלנו כך קבוצת ערכים מפוספסים שמרחקה מכל מספר מרוכב הוא לכל היותר 10. זה כמובן סותר את המסקנה ־ אי אפשר לקחת כדור ברדיוס יותר מאשר 10. ■