תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

1 ביוני 2017

1 פונקציות אנליטיות

בשיעור האחרון ראינו את משפט קזוראטי וויירשטראס. נראה מסקנה יפה וקלה:

מסקנה 1.1 תהי f פונקציה שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחד־חד־ערכית. אזי $f(z) = az + b$ עבור $a \neq 0$.

הוכחה: נוכיח שעבור f כזו, במשפט קזוראטי וויירשטראס עבור $z_0 = \infty$ אנחנו בהכרח באפשרות הראשונה (קיום הגבול). אחרת, נניח בשלילה שהתנאי השני מתקיים. אזי נובע כי $f(\{|z| > 2\}) = A$ קבוצה צפופה בתוך $\mathbb{C}$. מצד שני, $f(\{|z| < 1\}) = V$ היא קבוצה פתוחה, ממשפט ההעתקה הפתוחה (f אנליטית לא קבועה ולכן רגולרית). מההגדרה מתקיים $A \cap V \neq 0$ וזו סתירה לחד־חד־ערכיות ־ אלה תמונות של קבוצות זרות. כלומר, קיים הגבול

$$\lim_{z \to \infty} f(z)$$

אם גבול זה סופי, אז f חסומה על כל $\mathbb{C}$ וממשפט ליוביל קבועה, בסתירה לחד־חד־ערכיות. לכן הגבול הוא אינסופי, וראינו שבמצב זה נקבל $f(x) = p(x)$ פולינום. נשאיר כתרגיל את העובדה שפולינום חד־חד־ערכית הוא בהכרח לינארי. ■

הוכחנו בשיעור שעבר שאם $f_n \to f$ במידה שווה על קומפקטיות, אז אם f_nאנליטיות גם f אנליטית (כמסקנה ממשפט מוררה). נחזק זאת:

משפט 1.2 (ויירשטראס) בסיטואציה הזו, מתקיים גם $f_n' \to f'$ במידה שווה על קומפקטיות, וכך גם לנגזרות מסדר גבוה יותר (באינדוקציה).

הוכחה: ראשית, נעיר עובדה כללית ־ התכנסות במידה שווה על קומפקטיות נובעת מהתכנסות במידה שווה מקומית: אם לכל $z \in U$ יש סביבה שבה $f_n \to f$ במידה שווה, אזי $f_n \to f$ במידה שווה על קומפקטיות בתוך U (היה בשיעורי בית). לפי זה, בהינתן $z_0 \in U$, נרצה למצוא סביבה שלה שבה $f_n' \to f'$ במידה שווה. יהי $R > 0$ כך שמתקיים $\overline{B}_R(z_0) \subseteq U$. יהי $0 < r < R$ ונוכיח התכנסות במידה שווה על $\overline{B}_r(z_0)$. לשפת הכדור ברדיוס R נקרא γ_R. מנוסחת קושי לנגזרת:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} \, \mathrm{d}w$$

וכך גם אם נכתוב f במקום f_n. כעת, נסמן

$$\varepsilon_n = \sup_{z\in\overline{B}_R(z_0)} \left|f\left(z\right) - f_n\left(z\right)\right|$$

מהנתון $\varepsilon_n \to 0$, ונוכל להעריך בכדור $B_r\left(z_0\right)$:

$$\left|f_n'\left(z\right) - f'\left(z\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{f_n\left(w\right) - f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^2}\,\mathrm{d}w\right| \leq R\cdot\frac{\varepsilon_n}{\left(R-r\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן סיימנו. ■

1.1 ניתוח המבנה המקומי של פונקציה אנליטית

ראינו בעבר את עקרונות ההעתקה הפתוחות, המקסימום והמינימום (כאשר f לא קבועה). נניח כי f אנליטית בסביבת z_0, ונניח בשלב ראשון כי $f'\left(z_0\right) \neq 0$. נוכיח שבמקרה זה יש סביבה של z_0 שבה f חד־חד־ערכית (נובע מעובדה כללית מחדוא 3, אבל נוכיח ישירות). נניח בשלילה כי f אינה חד־חד־ערכית באף סביבה של z_0, כלומר קיימות $z_n, w_n \to z_0$ עם $f\left(z_n\right) = f\left(w_n\right)$ לכל n. בתרגיל בית, ראינו את משפט לגראנז' למקרה המרוכב: לכל z, w קיימים $a, b \in [z,w]$ כך שמתקיים

$$\frac{f\left(z\right) - f\left(w\right)}{z-w} = \mathrm{Re}\left(f'\left(a\right)\right) + i\mathrm{Im}\left(f'\left(b\right)\right)$$

נפעיל זאת עבור $z = z_n$, $w = w_n$ ונקבל $a_n, b_n \to z_0$ עבורן

$$\mathrm{Re}\left(f'\left(a_n\right)\right) + i\mathrm{Im}\left(f'\left(b_n\right)\right) = 0$$

מרציפות הנגזרת (אנליטית) ומרציפות ההטלה לצירים, נובע כי

$$\mathrm{Re}\left(f'\left(z_0\right)\right) = \mathrm{Im}\left(f'\left(z_0\right)\right) = 0$$

בסתירה להנחה. כעת נעבור לנתח את המקרה הכללי. לצורך הדיון שלנו נניח בלי הגבלת הכלליות כי $z_0 = 0$, על ידי החלפת $f\left(z\right)$ עם $g\left(z\right) = f\left(z+z_0\right)$. כמו כן, נוכל להניח $f\left(0\right) = 0$, על ידי החלפת $f\left(z\right)$ עם $h\left(z\right) = f\left(z\right) - f\left(0\right)$. כעת, f מוגדרת בסביבת 0 ומתאפסת שם. נכתוב

$$f\left(z\right) = z^k\varphi\left(z\right)$$

הכתיבה של f כפונקציה רגולרית, ונרשום

$$\varphi\left(z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

עם $a_0 \neq 0$. $k \geq 1$ הוא סדר ההתאפסות של הנגזרת - $k-1$ הנגזרות הראשונות של f מתאפסות והנגזרת מספר k - לא. φ לוקחת סביבה של 0 לתוך סביבה של $0 \neq a_0$, ואם

נבחר סביבה מספיק קטנה אז נוכל להוציא בסביבה הזו של a_0 שורש מסדר k (אנליטי) - שכן ראינושבכדור שלא מכיל את 0 אפשר להגדיר ארגומנט, ולכן לוגריתם, ולכן

$$\sqrt[k]{w} = e^{\frac{1}{k}\log w}$$

לכן בסביבה קטנה מספיק של 0 אפשר למצוא ψ אנליטית עם $(\psi(z))^k = \varphi(z)$ באותה סביבה. נוכל לרשום

$$f(z) = z^k\varphi(z) = z^k\psi^k(z) = (z\psi(z))^k$$

נשים לב כעת כי הפונקציה $z \mapsto z\psi(z)$ היא בעלת נגזרת שונה מאפס בנקודה $z=0$, כי

$$(z\psi(z))' = \psi(z) + z\psi'(z)$$

ובנקודה 0 נקבל $\psi(0)$, שהוא שורש מסדר k של $a_0 \neq 0$, ולכן לא אפס. לכן $z\psi(z)$ היא חד־חד־ערכית בסביבה של $z=0$. לכן, את f נוכל לתאר בתור הרכבה - ראשית ההעתקה החד־חד־ערכית $z \mapsto z\psi(z)$, ואז ההעתקה $w \mapsto w^k$ שהיא k־חד־ערכית (כלומר לכל תמונה יש k מקורות בדיוק). בפרט, נקבל:

מסקנה 1.3 אם f חד־חד־ערכית בתחום U, אזי בכל נקודה $z \in U$ מתקיים $f'(z) \neq 0$. בנוסף, הפונקציה ההפוכה $g = f^{-1}$ בהכרח גם אנליטית (מוגדרת על $f(U)$).

הוכחה: לגבי התאפסות הנגזרת: אחרת $k > 1$ ואז אין חד־חד־ערכיות בהעלאה בחזקת k. כעת, $f : U \to \mathbb{C}$ חד־חד־ערכית ואנליטית. ידוע כי $f(U) = V$ פתוחה. נזכור שהוכחנו כשדיברנו לראשונה על גזירות של פונקציות מרוכבות שאם $g \circ f = \mathrm{Id}$, $f'(z_0) \neq 0$ אזי

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

במקרה שלנו, f העתקה פתוחה, ולכן $g = f^{-1}$ רציפה (עובדה כללית שנובעת ממהגדרות ולא קשורה לגזירות). התנאי $f' \neq 0$ מתקבל אוטומטית, בגלל החלק הראשון. ■

משפט 1.4 (הלמה של שוורץ) יהי $D = B_1(0)$ ותהי f אנליטית על D, שמקיימת $|f(z)| \leq 1$ לכל $z \in D$ וכן $f(0) = 0$. אזי:

1. לכל $z \in D$ מתקיים $|f(z)| \leq |z|$, ואם יש $0 \neq z \in D$ המקיים $|f(z)| = |z|$ אזי $f(z) = \lambda z$, עבור $|\lambda| = 1$.
2. מתקיים $|f'(0)| \leq 1$, ואם מתקיים שוויון אזי $f(z) = \lambda z$, עבור $|\lambda| = 1$.

הוכחה:

1. ראשית, היות ומתקיים $f(0) = 0$ נכתוב $f(z) = z\varphi(z)$ עבור φ אנליטית (לאו דווקא עם $\varphi(0) \neq 0$). נתון כי $|f(z)| \leq 1$, כלומר עבור $z \neq 1$ נקבת

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{|z|}$$

יהי $r<1$, ונפעיל את עקרון המקסימום עבור φ בעדור $B_r\left(0\right)$ ־ נקבל שהמקסימום של φ מתקבל על שפת הכדור $\left\{|z|=r\right\}$. על שפה זו מתקיים $\left|\varphi\left(z\right)\right|\leq\frac{1}{r}$. ניקח $r\to 1$ ונקבל כי לכל $z\in D$ מתקיים $\left|\varphi\left(z\right)\right|\leq 1$, ומכאן

$$\left|f\left(z\right)\right|=\left|z\varphi\left(z\right)\right|\leq|z|$$

כעת נניח שיש $z_0\neq 0$ עבורו יש שוויון. על כן נקבל

$$\left|\varphi\left(z_0\right)\right|=1$$

מעקרון המקסימום, היות וקיבלנו מקסימום של φ בתוך הכדור (ראינו כבר $\left|\varphi\left(z\right)\right|\leq 1$), בהכרח $\varphi=\lambda$ קבועה (ובגלל השוויון בנקודה z_0 ברור כי $|\lambda|=1$) ולכן

$$f\left(z\right)=\lambda z$$

2. נשים לב שמתקיים

$$f'\left(z\right)=\varphi\left(z\right)+z\varphi'\left(z\right)$$

ובפרט

$$f'\left(0\right)=\varphi\left(0\right)$$

ידוע לנו כבר שמתקיים $|\varphi|\leq 1$ ולכן נקבל את אי השוויון שרצינו. אם מתקיים שוויון, נקבל את אותה מסקנה באותה צורה ־עקרון המקסימום.

■

משפט 1.5 נניח כי $f:D\to D$ אנליטית חד־חד־ערכית ועלץ אזי $f\left(z\right)=\lambda\varphi_a\left(z\right)$, עבור

$$\varphi_a\left(z\right)=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

כאשר $|\lambda|=1$ וכן $a\in D$.

הוכחה: ראשית נוכיח את הטענה תחת ההנחה הנוספת $f\left(0\right)=0$. כעת, אנו עומדים בתנאי הלמה של שוורץ, כלומר נקבל $\left|f\left(z\right)\right|\leq|z|$ לכל $z\in D$. כעת ניקח $g=f^{-1}$, שהיא גם אנליטית, ונקבל

$$|w|\leq\left|g\left(w\right)\right|$$

כעת נוכל להפעיל את הלמה של שוורץ גם על g, ולקבל את אי השוויון ההפוך, כלומר $|w|=\left|g\left(w\right)\right|$, משמע $g\left(z\right)=\lambda z$ עם $|\lambda|=1$. בבירור, מכאן מתקיים $f=\lambda^{-1}z$, וכעת $\left|\lambda^{-1}\right|=1$ וכן

$$z=\varphi_0\left(z\right)$$

ולכן סיימנו את המקרה הפרטי הזה.

במקרה הכללי, נסמן a את הנקודה שעוברת אל 0, כלומר $f\left(a\right)=0$ (קיימת כי f על). בתרגיל הבית הראשון בקורס, ראינו שכל φ_a (העתקת מוביוס) היא חד־חד־ערכית ועל D. ראינו גם כי

$$\varphi_{a^{-1}}=\left(\varphi_a\right)^{-1}$$

כעת נביט בפונקציה $g=f\circ\varphi_a^{-1}\left(z\right)$ זוהי הרכבה של שתי פונקציות חד־חד־ערכיות ועל, ולכן הי אכזו בעצמה, וכן $g\left(0\right)=0$. מהמקרה הפרטי נקבל $g\left(z\right)=\lambda z$ עבור $\left|\lambda\right|=1$. לכן

$$f=\lambda\cdot\varphi_a\left(z\right)$$

וסיימנו. ■