תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

28 במאי 2017

משפט 0.1 (מוררה) נניח כי f רציפה בתחום U, ולכל משולש $\Delta \subseteq U$ מתקיים

$$\int\limits_{\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0$$

אזי f אנליטית.

הוכחה: כיוון שהמסקנה היא מקומית (לכל נקודה קיימת סביב בה f היא טור חזקות), נוכל להניח (על ידי הקטנת U אם צריך) שהתחום U קמור. במקרה זה הוכחנו שקיימת F גזירה על U עם $F' = f$. F גזירה ולכן אנליטית, ונגזרת של אנליטית היא אנליטית, כלומר f אנליטית. ■

מסקנה 0.2 אם $f_n \to f$ במידה שווה על קומפקטיות בתחום U, וכל f_n אנליטית, אזי גם f אנליטית.

הוכחה: תהי $z_0 \in U$. נרצה להוכיח כי f אנליטית בנקודה z_0. ניקח כדור B קטן מספיק סביב z_0 בתוך U, ונחליף את U בו (כלומר עכשיו התחום קמור). מהאנליטיות נקבל שלכל $\Delta \subseteq B$ מתקיים

$$0 = \int\limits_{\Delta} f_n \, \mathrm{d}z \to \int\limits_{\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0$$

ולכן נקבל כי f אנליטית ממשפט מוררה. ■

משפט 0.3 נניח כי f אנליטית בכל $\mathbb{C}$ (במצב זה נאמר כי f <u>שלמה</u>) ומתקיים

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

אזי f היא פולינום (לא קבוע). את הכיוון ההפוך והקל הוכחנו בשיעור הראשון!

הוכחה: נגדיר

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

בסביבה קטנה מספיק של 0, שבה $f\left(\frac{1}{z}\right)$ לא מתאפסת (קיימת בגלל התנאי). נשים לב שההנחה שלנו שקולה לרציפות של h באפס. אם כן, h גזירה בסביבת 0 ורציפה בנקודה $z=0$. הוכחנו שבמצב הזה h חייבת להיות גזירה בנקודה $z=0$, כלומר h אנליטית בנקודה 0. נכתוב אותה כטור חזקות:

$$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=z^k\varphi(z)$$

כאשר φ רציפה באפס וכן

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=a\neq 0$$

כלומר זו הכתיבה של h כפונקציה רגולרית עם $k\geq 1$ (נשים לב שהשתמשנו בכך שהפונקציה h לא קבועה, כי f לא קבועה). מכאן, נקבל כי בסביבה קטנה מספיק של 0, מתקיים

$$|h(z)|>|z|^k\frac{|a|}{2}$$

נחזור להגדרה של h ונקבל שבסביבה קטנה מספיק $B_r(0)$ של 0 מתקיים

$$\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|<\left|\frac{1}{z}\right|^k\frac{2}{|a|}$$

כעת, ניקח $w=\frac{1}{z}$ ונקבל שכאשר $|w|>\frac{1}{r}$ מתקיים

$$|f(w)|<\frac{2}{|a|}|w|^k$$

לכן, ממשפט ליוביל המוכלל, נקבל כי f פולינום ממעלה לכל היותר $k-1$. ∎

משפט 0.4 (ההשלמה של רימן) נניח כי f גזירה בסביבה מנוקבת של z_0, וחסומה שם. אזי ניתן להגדיר את הערך של f בנקודה z_0 כך שהפונקציה תהיה גזירה גם שם.

הוכחה: נגדיר

$$g(z)=f(z)(z-z_0)$$

באותה סביבה. לכל $z\neq z_0$ הפונקציה g היא גזירה (כמכפלת גזירות), ובנקודה $z=z_0$ היא רציפה אם נגדיר $g(z_0)=0$. לכן g גזירה גם בנקודה z_0, ונכתוב אותה כטור חזקות:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

נקבל $a_0=0$, ולכן

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=(z-z_0)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(z-z_0)^n}_{\psi(z)}$$

קיבלנו כי

$$f(z)(z-z_0)=\psi(z)(z-z_0)$$

אם כן, לכל $z\neq z_0$ נקבל $f(z)=\psi(z)$, ונגדיר $f(z_0)=\psi(z_0)$ ונקבל $f=\psi$, בפרט אנליטית בנקודה z_0. ■

משפט 0.5 (קסוראטי־וויירשטראס) נניח כי f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 (אולי אינסוף). אזי אחת בדיוק משתי האופציות הבאות מתרחשת:

1. קיים הגבול

$$\lim_{z\to z_0}f(z)$$

ואולי הוא אינסופי.

2. על כל סביבה של z_0 (שבה f מוגדרת) תמונתה של f היא צפופה בתוך $\mathbb{C}$ (כלומר הערכים של תמונת f קרובים כרצוננו לכל מספר מרוכב).

הוכחה: נניח כי האפשרות השנייה לא מתקיימת, ונראה שהראשונה כן (ברור ששתי האפשרויות לא יכולות להתקיים ביחד).

אם האפשרות השנייה לא מתקיימת, אז קיימים $y\in\mathbb{C}$, סביבה U של z_0 ומספר $\delta>0$ כך שלכל $w\in U$ מתקיים

$$|f(w)-y|>\delta$$

נביט כעת בפונקציה

$$h(w)=\frac{1}{f(w)-y}$$

בסביבה המנוקבת U של z_0. ההנחה שלנו על δ גוררת חסימות של h בתחום U. ממשפט ההשלמה של רימן, נוכל להשלים את h לפונקציה אנליטית בנקודה z_0. בפרט, קיים הגבול

$$a=\lim_{z\to z_0}h(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)-y}$$

אם $a=0$, נקבל כי

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

אחרת, $a\neq 0$ ולכן

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \frac{1}{a} + y$$

בכל מקרה קיבלנו שהגבול קיים (אולי אינסופי). עבור $z_0=\infty$, ההוכחה זהה, כאשר מסתכלים על $f\left(\frac{1}{z}\right)$ בנקודה $z=0$. ■