תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

25 במאי 2017

מטרתנו היא להראות את המשפט החשוב הבא:

משפט 0.1 נניח כי f גזירה בתחום U. אזי f אנליטית בתחום U, כלומר סביב כל $z_0 \in U$ אפשר לפתח אותה לטור חזקות (עם רדיוס התכנסות חיובי).

לשם הוכחת המשפט, נחזור לסוף הוכחת משפט גורסה - אם f גזירה אז $\int_\Delta f = 0$ לכל מסילת משולש $\Delta \subseteq U$ (ולכן אם U קמור אז יש לה פונקציה קדומה). הוכחנו לזה תוספת חשובה, שבפרט גררה שאם בנקודה מסויימת f רציפה ולאו דווקא גזירה, עדיין האינטגרל מתאפס על כל משולש.

השלב הבא הוא פיתוח נוסחת קושי למשולש - בהינתן f גזירה בתחום U ונקודה $z_0 \in U$, נשים את z_0 במרכז משולש, נאמר שווה צלעות, שמוכל בתוך U. מפתחים את נוסחת קושי למשולש בדיוק כפי שעשינו בעבר - הגדרנו לכל z בתוך המשולש פונקציה

$$g_z(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

על המשולש. זוהי פונקציה של w שהיא גזירה בסביבה של המשולש, ובנקודה $w = z$ היא רציפה. לכן משפט גורסה עם התוספת מבטיחים כי

$$\int_\Delta g_z(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

ומכאן ישירות מההגדרה נקבל

$$2\pi i \cdot f(z) = 2\pi i f(z)\,\mathrm{Ind}_\Delta(z) = f(z)\int_\Delta \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\Delta \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\Delta \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

אנחנו נשתמש בזה ונראה שאגף ימין במשוואה האחרונה הוא פונקציה אנליטית של z. לשם הפשטות, נניח תחילה כי $z_0 = 0$, כלומר רוצים להראות כי f אנליטית בסביבת 0. לשם כך נכתוב מחדש:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}}$$

z קרוב מאוד לאפס (אנחנו קובעים כמה), w על המסילה הקבועה שלנו, ולכן $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ אוניפורמית לכל w בשפת המשולש. לכן נוכל לפתח:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{f(w)}{w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n$$

הטור הזה מתכנס במידה שווה על w לכל בחירה קבועה של z, ולכן נוכל לבצע אינטגרציה על w ולקבל

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)\cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

וקיבלנו את f כטור חזקות במשתנה z - כלומר זו פונקציה אנליטית סביב $z_0 = 0$. כמובן שלכל טור חזקות ובפרט לזה מתקיים

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

ביחד נקבל

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Delta}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

כעת נחזור למקרה של z_0 כללי. מחליפים בחישוב במכנה את w עם $w - z_0$, ואת z עם $z - z_0$. כלומר

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

ואז

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\Delta}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^n$$

ואז גם

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Delta}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

כדי לבצע את טיעון האינטגרציה איבר איבר, באופן כללי, יש לעבוד עם z בתוך קבוצה קומפקטית K כך שעבורה קיים $q < 1$, שהוא פונקציה של z, כך שלכל $z \in K$ ולכל w בשפת המשולש, מתקיים

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < q$$

אזי לכל $z \in K$ יש התכנסות במידה שווה על w בשפת המשולש. נשים לב שבאופן כללי קיבלנו את הנוסחה הבאה:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Delta}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

זה מסיים את הוכחת המשפט על זירות שגוררת אנליטיות. אנחנו רוצים כעת להבין את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות המתאר את f בסביבת z_0. ההוכחה נותנת שלכל קבוצה K בה קיים קבוע $q(K)<1$ כך שמתקיים

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<q$$

לכל $z\in K$, $w\in\partial\Delta$, הטור מתכנס עבור $z\in K$. נשאף לקחת משולשים כמה שיותר גדולים, כדי לקבל K גדולה כמה שאפשר. כיוון שלשאלת רדיוס ההתכנסות של טור החקות יש סימטריה מעגלית טבעית, אפשר להחליף (וטבעי להחליף) את המשולש במעגל סביב z_0. אנחנו יודעים שמעגל ומשולש הומוטופיים, ולכן כל הדיון שעשינו כאן תקף גם לאינטגרלים על מעגלים.

מסקנה 0.2 אם $B_R(z_0)\subseteq U$ אזי רדיוס ההתכנסות של הטור המתאר את f סביב z_0 הוא לפחות R.

הוכחה: לכל $\varepsilon>0$ ניקח במקום משולש מעגל $|z-z_0|=R$, ומביטים בנקודה z בתוך הקבוצה הקומפקטית $K=\{|z-z_0|\le R-\varepsilon\}$. עליה מתקיים

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|\le\frac{R-\varepsilon}{R}=1-\frac{\varepsilon}{R}=q$$

לכן ניתן להמשיך את ההוכחה כמו קודם. הראינו שהריוס הוא לפחות $R-\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$ ולכן זה נכון גם עבור R. ■

כדי להבין מדוע התוצאה הזו כל כך לא מובנת מאליה, נביט במקרה $\frac{1}{1+x^2}$ - אנליטית בכל $\mathbb{R}$, אבל רדיוס ההתכנסות סביב 0 הוא 1 - בגלל הנקודה הסינגולרית i.

כעת נחזור לנוסחאות לנגזרות שראינו. בעזרת ההערכה הסטנדרטית של אינטגרלים, נוכל לקבל חסמים שהם שימושיים: אם כאשר $|z-z_0|=R$ מתקיים $|f(z)|\le M$ אזי

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!}{R^n}M$$

מכאן אפשר להוציא את משפט ליוביל ואת משפט ליוביל המוכלל.