תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

21 במאי 2017

בשיעור שעבר, דיברנו על משפט קושי ההומולוגי:

משפט 0.1 יהי U תחום, תהי f גזירה על U ותהי α לולאה, ולמעשה שרשרת, כלומר היא סכום פורמלי של לולאות:

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

שהומולוגית לאפס, כלומר, לכל $z\notin U$ מתקיים $\mathrm{Ind}_\alpha\left(z\right)=0$. אזי מתקיים

$$f\left(z\right)2\pi i\mathrm{Ind}_\alpha\left(z\right)=\int\limits_\alpha\frac{f\left(w\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

וכן

$$\int\limits_\alpha f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$$

הוכחה: נותר לנו להוכיח את החלק השני. ניקח f כמו במשפט, וניקח $z_0\in U$ לא על $\mathrm{Im}\alpha$, ונגדיר

$$g\left(z\right)=f\left(z\right)\left(z-z_0\right)$$

זו פונקציה גזירה על U. נפעיל עליה את החלק הראשון של המשפט בנקודה $z=z_0$. ברור שמתקיים $g\left(z_0\right)=0$, ולכן אגף שמאל מתאפס, ונקבל

$$0=\int\limits_\alpha\frac{f\left(w\right)\left(w-z_0\right)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w=\int\limits_\alpha f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

■

מסקנה 0.2 אם U פשוט קשר הומולוגית, כלומר לכל לולאה $\alpha\subseteq U$ ולכל $z\notin U$ מתקיים $\mathrm{Ind}_\alpha\left(z\right)=0$, אזי U פשוט קשר לפונקציות, כלומר לכל f גזירה על U יש F עם $F'=f$ על כל U.

הוכחה: קבועים נקודה בסיסית $z_0 \in U$. לכל $z \in U$ ישנה מסילה פוליגונלית P_z מהנקודה z_0 אל z (קיימת כי U תחום). נגדיר

$$F(z) = \int\limits_{P_z} f(w)\, \mathrm{d}w$$

זה מוגדר היטב בדיוק בגלל התנאי על התאפסות האינטגרל, ובעבר ראינו כבר שאם מגדירים ככה את F מקבלים $F' = f$. ■

מסקנה 0.3 נניח את תנאי משפט קושי ההומולוגי, ויהיו α, β לולאות לאו דווקא הומולוגיות לאפס, אבל כן מתקיים לכל $z \notin U$

$$\mathrm{Ind}_\alpha(z) = \mathrm{Ind}_\beta(z)$$

אזי

$$\int\limits_\alpha f\, \mathrm{d}z = \int\limits_\beta f\, \mathrm{d}z$$

הוכחה: נובעת מיידית ממשפט קושי ההומולוגי על ידי לקיחת המסילה $\gamma = \alpha - \beta$. ■

דוגמא ניתן דוגמא למסילה שהומולוגית לאפס אבל לא כוויצה, בתחום $U = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ - נקיף את 1 באוריינטציה חיובית, אחר כך נקיף את -1 באוריינטציה חיובית, ואז את 1 באוריינטציה שלילית ואת 1- באוריינטציה שלילית (כל המעגלים משיקים בנקודה 0).

משפט 0.4 (משפט השארית למסילות הומולוגיות לאפס) יהי U תחום, ותהי f גזירה על U למעט מספר סופי של נקודות סינגולריות $p_1, \ldots, p_n$. תהי α לולאה (או שרשרת) הומולוגית לאפס בתחום U, עם $p_i \notin \mathrm{Im}\alpha$. אזי

$$\int\limits_\alpha f(z)\, \mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_\alpha(p_i) \,\mathrm{Res}(f, p_i)$$

הוכחה: כדי להסיק את המשפט הזה ממשפט קושי ההומולוגי נשתמש ברעיון אחר, כיוון שרוצים להמשיך לעבוד רק עם f גזירה בתחום הגדרתה. לשם כך, יהי

$$V = U \setminus \{p_i\}_{i=1}^{n}$$

עכשיו f גזירה על כל V. אנחנו צריכים לתקן את המסילה, כי כעת האינדקס שלה על חלק מהנקודות שמחוץ לקבוצה V אינו 0. יהי C_i מעגל נגד כיוון השעון סביב p_i שמוכל בתוך U ולא מכיל אף נקודה p_j כאשר $i \neq j$. נגדיר

$$n_i = \mathrm{Ind}_\alpha(p_i)$$

ונזכור שהשארית מקיימת

$$a_i = \mathrm{Res}\left(f, p_i\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_i} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

נביט בשרשרת החדשה

$$\beta = \alpha - \sum_{i=1}^{n} n_i C_i$$

ונשים לב כי β הומולוגית לאפס בתחום V. זאת משום שביחס לנקודות מחוץ לתחום U האינדקס של α, β שווה, ובנקודות p_j, עבור j קבוע, נקבל

$$\mathrm{Ind}_{\beta}\left(p_j\right) = \mathrm{Ind}_{\alpha}\left(p_j\right) - \sum_{i=1}^{n} n_i \mathrm{Ind}_{C_i}\left(p_j\right) = \mathrm{Ind}_{\alpha}\left(p_j\right) - n_j \cdot 1 = 0$$

כעת, משתמשים במשפט קושי ההומולוגי עבור השרשרת β והפונקציה f על V:

$$\int\limits_{\beta} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

אזי

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\alpha - \sum n_i C_i} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} n_i \int\limits_{C_i} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\alpha}\left(p_i\right)\left(2\pi i\right)\mathrm{Res}\left(f, p_i\right) \end{aligned}$$

וזו הנוסחה שרצינו. ■