תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

18 במאי 2017

נני כי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחוםותהי f גזירה על U. נרצה להראות שהיא גזירה אינסוף פעמים, ולקבל מסקנות. נביט במסילת מעגל פשוטה α בתוך U (אפשר גם ריבוע או משולש או כל צורה כזו).

לכל נקודה z בפנים של המעגל נגדיר

$$g_z(w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

כמובן שזה לא מוגדר בנקודה z. אפשר להגדיר באופן רציף $g_z(z) = f'(z)$, אבל אנחנו נעדיף לחשוב על זה כנקודת אי הגדרה. מצד שני, נובע שזו נקודת סינגולריות אינטגרבילית - כלומר השארית שם 0. α כוויצה בתחום U, ולכן אנחנו יודעים כי

$$\int_\alpha g_z(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

ממשפט השארית.

נשים לב שאם קיימת נקודה אחת בתוך המעגל z_0 שבה f רק רציפה ולא גזירה, ומגדירים באותו אופן $g_z(w)$, אז גם z_0 הופכת להיות נקודת סינגולריות בה g_z אינה מוגדרת, אבל נשים לב שעדיין $\mathrm{Res}(g_z(w), z) = 0$ כי מתקיים התנאי

$$\lim_{w \to z_0} g_z(w)(w - z_0) = 0$$

בכל נקודה בה $z \neq z_0$, זה ברור, כי $g_z(w)$ חסומה בסביבות z_0. עבור $z = z_0$ נקבל

$$g_{z_0}(w)(w - z_0) = f(w) - f(z_0) \to 0$$

מרציפות. לפיכך שוב נקבל

$$\int_\alpha g_z(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

כאמור, ישנן לכל היותר שתי נקודות סינגולריות, אבל השאריות הן 0. אם כן, נקבל

$$0=\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)-f\left(z\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w-\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(z\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

$$\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(z\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w=f\left(z\right)\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)2\pi i$$

מבחירת α (כל מסילה כזו עם התכונה הזו תעבוד), $\mathrm{Ind}_{\alpha}z=1$, ולכן

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f\left(w\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

זו נקראת נסוחת קושי (או נוסחת קושי למעגל, אם α מעגל). בתרגיל הבית ראינו כי אגף ימין הוא תמיד פונקציה גזירה של z ונגזרתה היא

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{2}}\,\mathrm{d}w$$

נובע כי f גזירה בפנים של α ומתקיים

$$f'\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

כמו כן ראינו

$$f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

בפרט, קיבלנו שאם f גזירה בסביבת z_0 ורציפה בנקודה z_0 אזי f גזירה גם בנקודה z_0.

מסקנה 0.1 (משפט ליוביל המצומצם) נניח כי f גזירה בכל $\mathbb{C}$. נניח כי $f\left(z\right)\to0$, כאשר $z\to\infty$. אזי $f\equiv0$.

הוכחה: יהי $z_0\in\mathbb{C}$ ויהי $\varepsilon>0$. ניקח R גדול מספיק עבורו אם $\left|z-z_0\right|=R$ אזי $\left|f\left(z\right)\right|<\varepsilon$. נפעיל כאן את נוסחת קושי לשפת המעגל $\left|z-z_0\right|=R$:

$$\left|f\left(z_0\right)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{R}2\pi R=\varepsilon$$

ולכן $f\left(z_0\right)=0$, כי $\varepsilon>0$ שרירותי. ■

משפט 0.2 (משפט ליוביל) אם f גזירה בכל $\mathbb{C}$ וחסומה, אזי f קבועה.

הוכחה: משתמשים בנוסחת קושי לנגזרת, ומראים כי $f'\equiv0$. ■

משפט 0.3 (משפט ליוביל המוכלל) אם f גזירה בכל $\mathbb{C}$, $\frac{f(z)}{|z^n|}\to0$ כאשר $z\to\infty$, אזי f פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$.

1 משפט קושי ההומולוגי

ניזכר שהגדרנו לולאה α להיות הומולוגית לאפס בתחום U אם לכל $z\notin U$ מתקיים $\mathrm{Ind}_{\alpha}z=0$. זה שוב ניסיון לתאר מצב בו הפנים של α לא מכיל חורים בתוך U.

משפט 1.1 (משפט קושי ההומולוגי) תהי f אנליטית בתוך U,ותהי α לולאה עם $\mathrm{Im}\alpha\subseteq U$ שהומולוגית לאפס בתחום U. אזי

$$2\pi i\cdot f\left(z\right)\cdot\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)=\int\limits_{\alpha}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

לכל $z\in U$, וכמו כן

$$\int\limits_{\alpha}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=0$$

נראה שהנסוחה השנייה נובעת ישירות מהראשונה. נשים לב שראינו לפני רגע נוסחה זהה עבור α מעגל, z בפנימו.

למעשה, חשוב יהיה לנו לטפל בלולאות כלליות יותר: נניח $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ סכום של לולאות כאשר, כזכור, מגדירים

$$\int\limits_{\alpha}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\alpha_i}f\,\mathrm{d}w$$

ובדומה

$$\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ind}_{\alpha_i}\left(z\right)$$

נשים לב שאם $\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)=0$ עדיין לאו דווקא $\mathrm{Ind}_{\alpha_i}\left(z\right)=0$. **הוכחה:** (של המשפט) נגדיר

$$U^0=\left\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)=0\right\}$$

זו קבוצה פתוחה שלא מכילה את $\mathrm{Im}\alpha$ (ועליה האינדקס לא מוגדר), וכמו כן מהנתון על הומולוגיות α מתקיים $U^c\subseteq U^0$. אזי $\mathbb{C}=U\cup U^0$.

עבור $z\in\mathbb{C}$ נגדיר את הפונקציות הבאות: אם $z\in U$, אז

$$g_z^1\left(w\right)=\begin{cases}\frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w\neq z\\ f'\left(z\right) & w=z\end{cases}$$

כפונקציה של w, זו פונקציה גזירה בכל $w \neq z$. היא רציפה בנקודה $w = z$, כי f גזירה בנקודה z, ולכן ראינו שנובע שהיא גזירה לכל $w \in U$. עכשיו נגדיר

$$h^1 (z) = \int_{\alpha} g_z^1 (w) \, \mathrm{d}w$$

עבור $z \in U^0$ נגדיר

$$g_z^0 (w) = \frac{f (w)}{w - z}$$

ואז נגדיר

$$h^0 (z) = \int_{\alpha} g_z^0 (w) \, \mathrm{d}w$$

נגדיר

$$h (z) = \begin{cases} h^1 (z) & z \in U \\ h^0 (z) & z \in U^0 \end{cases}$$

נראה שזה מוגדר היטב (כלומר שעל $U \cap U^0$ יש הזדהות של h^1, h^0), גזיר, וכן $h (z) \to 0$ כאשר $z \to \infty$. ממשפט ליוביל המצומצם ינבע $h = 0$, ובפרט $h^1 = 0$. זה יגרור את החלק הראשון של המשפט, כמו בהוכחת נוסחת קושי.

ראשית, נראה כי $h^1 (z)$ גזירה. כאשר $z \notin \mathrm{Im}\alpha$ נכתוב

$$g_z^1 (w) = \frac{f (w)}{w - z} - \frac{f (z)}{w - z}$$

בתרגיל הבית ראינו שהאינטגרל על כל אחד מהמחוברים הוא פונקציה גזירה של z. ממה שהוכחנו הום נובע כי $g_z^1 (w)$ גזירה לכל $w \in U$.

כאשר $z \in \mathrm{Im}\alpha$, לא נוכל להשתמש ישירות בתרגיל הבית, אבל אפשר להשתמש בתרגיל בית אחר - אם $z \in \mathrm{Im}\alpha$, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת לולאה β עם $||\alpha - \beta|| < \varepsilon$ וכן $z \notin \mathrm{Im}\beta$. יחד עם זה נזכור שאפשר לבחור ε קטן מספיק ככה שבמצב הזה אינטגרלים על β ועל α יהיו שווים. לכ ונוכל להשתמש במסילה β לצורך הגדרת $h^1 (z)$ ולקב גזירות גם עבור $z \in \mathrm{Im}\alpha$.

$h^0 (z)$ בבירור גזירה - זה פשוט נובע מאותו תרגיל בית. נותר לנו להראות כי על החיתוך הפונקציות מסכימות. אכן:

$$h^1 (z) - h^0 (z) = \int_{\alpha} \frac{f (z)}{w - z} \, \mathrm{d}w = f (z) \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_{\alpha} (z) = 0$$

כי $z \in U^0$. לבסוף, כאשר $z \to \infty$, בוודאות יש שלב שממנו $z \in U_0$. לכן רחוק מספיק, $h (z) = h_0 (z)$. לכן נראה כי $h_0 (z) \to 0$ במצב זה.

$$h_0 (z) = \int_{\alpha} \frac{f (w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

כאשר $z \to \infty$ מתקיים $\left|\frac{f(w)}{w-z}\right| \to 0$, ולכן גם האינטגרל שואף לאפס. לכן $h(z) \to 0$,
וממשפט ליוביל המצומם נסיים, כמו שתיארנו קודם. ■