תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

14 במאי 2017

משפט 0.1 תהי $f \not\equiv 0$ אנליטית בתחום U ונניח כי $f(z_0) = 0$. יהי $r > 0$ כך שמתקיים $B_r(z_0) \subseteq U$. אזי לכל $0 < \delta < r$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם g אנליטית על U עם $|f - g| < \varepsilon$ על $B_\delta(z_0)$, אזי יש לפונקציה g התאפסות בתוך $B_\delta(z_0)$ (ואפילו הריבוי הכולל של ההתאפסויות של g שווה לריבוי של f בנקודה z_0).

הוכחה: שימוש ישיר במשפט רושה. ראשית, על ידי הקטנת r אם צריך, נוכל להניח, היות ולקחנו f אנליטית ולא קבועה, שהאפס היחיד שלה בכדור $B_r(z_0)$ הוא $z = z_0$. עכשיו, בהינתן $0 < \delta < r$, יהי

$$\varepsilon = \min_{|z-z_0|=\delta} |f(z)|$$

כעת, אם $|g - f| < \varepsilon$ על שפת הכדור, נפעיל שם את משפט רושה - מתקיים שם

$$|f - g| > |f| + |g|$$

אגף שמאל קטן מאשר ε, בעוד אגף ימין גדול מאשר אפסילון - לכן משפט רושה מבטיח מספר זהה של התאפסויות בפנים הכדור של f, g (כולל ריבוי). ■

מסקנה 0.2 נניח כי $f \not\equiv 0$ אנליטית בתחום U, $f(z_0) = 0$. נניח כי $g_n \to f$ במידה שווה על קומפקטיות בתוך U. אזי עבור n גדול מספיק קיים z_n עם $g_n(z_n) = 0$ וכן $z_n \to z_0$. אינטואיטיבית, כל התאפסות של f היא גבול של התאפסויות של g_n.

הוכחה: לוקחים במשפט הקודם סדרת δ_m שהולכת לאפס, ולה מתאימה סדרת ε_m ששואפת לאפס. כעת הטענה נובעת מהתכנסות במידה שווה על קומפקטיות של g_n אל f. ■

הערה 0.3 ממש לא נכון במקרה הממשי - $f(x) = x^2$, $g_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ היא דוגמה נגדית פשוטה.

מסקנה 0.4 (הכללה של הקודמת) אם f אנליטית לא קבועה בתחום U, אזי לכל $c \in \mathbb{C}$, אם $f(z_0) = c$, $g_n \to f$ במידה שווה על קופקטיות, אזזי לכל n מספיק גדול קיימת סדרת z_n עם $g_n(z_n) = c$, וכן $z_n \to c$.

הוכחה: נובע מהמסקנה הקודמת על ידי לקיחת $f - c, g_n - c$. ■

משפט 0.5 (משפט הורוויץ) נניח כי f אנליטית ולא קבועה בתחום U, $g_n \to f$ אנליטיות ושואפות במידה שווה על קומפקטיות אל f. אם כל g_n היא חד־חד־ערכית אזי כך גם f.

הוכחה: נניח בשלילה כי פונקציית הגבול f אינה חד־חד־ערכית, כלומר אינה קבועה, אנליטית וישנן $w_0 \neq z_0$ עם $f(z_0) = f(w_0) = c$. יהי $d = |z_0 - w_0|$. מהמסקנה הקודמת, לכל n מספיק גדול נוכל למצוא z_n, w_n עם $|z_n - z_0| < \frac{d}{3}$, $|w_n - w_0| < \frac{d}{3}$, $g_n(w_n) = g_n(z_n) = c$. לכן נקבל כי g_n אינה חד־חד־ערכית, בסתירה. ∎

מסקנה 0.6 גבול במידה שווה על קומפקטיות של אנליטיות חד־חד־ערכיות הוא קבוע או חד־חד־ערכי. המקרה של קבוע יכול לקרות - למשל $g_n(z) = \frac{z}{n}$, חד־חד־ערכיות ושואפות במידה שווה על קומפקטיות אל 0.