תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

11 במאי 2017

ראינו בשיעור שעבר את משפט השארית, ובתרגיל בית ראינו חישוב של אינטגרל בעזרת כלים מרוכבים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$$

כעת נחשב כאן, לכל פרמטר t ממשי, את

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

נחשב ראשית את האינטגרל בקטע $[-R,R]$. נשלים את הקטע למסילה מלבנית סגורה כלפי מעלה (מקיפה את i, לא את $-i$). חישוב השארית של $\frac{1}{1+x^2}$ בנקודה i מתבצע בקלות על ידי

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

כעת חסמנו את האינטגרל על שלושת חלקי המסילה שאינם על הישר הממשי על ידי אורך המסילה (לינארי בגודל R) כפול חסם על הפונקציה ($\frac{1}{R^2-2}$ למשל), וראינו שזה שואף לאפס כאשר $R \to \infty$.

באותה שיטה נחשב את

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

עם סיבוך קטן. נניח כי $t \geq 0$. אז נסגור את המסילה בחצי המישור העליון, כמו קודם, ומשתמשים בכך שעבור $t \geq 0$ מתקיים

$$\left|e^{itz}\right| \leq 1$$

כאשר $\mathrm{Im}z \geq 0$. עבור $t \leq 0$, אותו דבר נכון עם $\mathrm{Im}z \leq 0$, ולכן נסגור את המסילה בחצי המישור התחתון (באוריינטציה ההפוכה ־ האינדקס של $-i$ הוא ־1). עבור f החדשה נקבל

$$\mathrm{Res}\,(f,i) = \frac{e^{-t}}{2i}$$
$$\mathrm{Res}\,(f,-i) = -\frac{e^{t}}{2i}$$

חוסמים את הפונקציה על חלק המסילה הלא ממשי שוב, ומקבלים

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi e^{-t} & t \geq 0 \\ \pi e^{t} & t \leq 0 \end{cases} = \pi e^{-|t|}$$

נעבור כעת לדבר אחר. בהינתן לולאה α, למרות שהמושג של להיות "בפנים" של α או "מחוצה לה" הוא די אינטואיטיבים. רוצים לנסות להגדיר אותו במדוייק. מושג האינדקס מציע דרך טבעית לעשות זאת ־ נרצה להגדיר את הפנים של α להיות אותן נקודות מחוץ לתמונה של α שהאינדקס שלהן לא 0. ההגדרה הזו מדוייקת לחלוטין כאשר המסילה פשוטה ־ כלומר $\alpha\,|_{[a,b)}$ חד־חד־ערכית.

משפט 0.1 (משפט ז'ורדן) תהי α לולאה פשוטה במישור. אזי $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\alpha$ מתחלק לשני מרכיבי קשירות. אחד אינו חסום, ובו האינקס הוא 0, והשני חסום ועליו האינדקס תמיד 1 או תמיד ־1. השפה של שני המרכיבים הללו היא בדיוק $\mathrm{Im}\alpha$.

זה משפט כללי מאוד בטופולוגיה, שלא נוכיח או נשתמש בו.

הגדרה 0.2 לולאה α נקראת פשוטה הומולוגית וחיובית אם לכל $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\alpha$ מתקיים $\mathrm{Ind}_\alpha(z) = 0$ או $\mathrm{Ind}_\alpha(z) = 1$. בסיטואציה זו נגדיר את הפנים של α:

$$\mathring{\alpha} = \{z \mid \mathrm{ind}_\alpha(z) \neq 0\}$$

משפט ז'ורדן מבטיח שכל לולאה פשוטה α, עד כדי אוריינטציה, היא פשוטה הומולוגית וחיובית.

1 עקרון הארגומנט

משפט 1.1 (עקרון הארגומנט) תהי f אנליטית בתחום U, ותהי α מסילה פשוטה הומולוגית (חיובית) וכוויצה בתוך U. נניח כי f לא מתאפסת על $\mathrm{Im}\alpha$. אזי

$$\int\limits_{\alpha} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = 2\pi i N$$

כאשר N הוא מספר האפסים של f בפנים של α (כולל ריבוי).

תזכורת אם f אנליטית על U, $f\left(z_0\right)=0$, אזי נוכל לכתוב $f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^k g\left(z\right)$ כאשר g אנליטית עם $g\left(z_0\right)\neq 0$, ואז k נקרא הריבוי של z_0 כאפס של f.

הוכחה: לפני ההוכחה עצמה, נבין למה מספר האפסים סופי. נזכור כי $\overset{\circ}{\alpha}\cup\mathrm{Im}\alpha$ קומפקטי. עכשיו, נשים לב שכאשר $f\neq 0$ אנליטית בתחום U, לכל $z_0\in U$ יש סביבה U_{z_0} שבה האפס היחיד של f הוא (אולי) z_0 בעצמו - אם היא לא מתאפסת בנקודה z_0 אז היא לא מתאפסת בכל הסביבה - כי אם $f\left(z_0\right)=0$, נכתוב $f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^k g\left(z\right)$ כאשר g אנליטית עם $g\left(z_0\right)\neq 0$, ומכאן שבסביבה קרובה מספיק של z_0 $\left(z-z_0\right)^k$ לא אפס, $g\left(z\right)$ לא אפס, ולכן גם $f\left(z\right)$ לא אפס. תהי $K\subseteq U$ קומפקטית. הכיסוי $\left\{U_z\right\}_{z\in K}$ הוא כיסוי פתוח של K, ולכן יש לו תת כיסוי סופי - ולכן יש מספר סופי של אפסים בתוך K. כעת אנחנו מוכנים להוכיח את עקרון הארגומנט עצמו.

בנקודות בהן $f\neq 0$, $\frac{f'}{f}$ היא גזירה (f גזירה אינסוף פעמים). הנקודות הסינגולריות של f הן הנקודות שבהן $f=0$. ממשפט השארית:

$$\int\limits_{\alpha}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{f(z)=0}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},z\right)\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)$$

מעניינות אותנו כאן רק הנקודות p_i שעבורן השארית לא אפס וגם האינדקס לא אפס. התנאי על האינדקס אומר שהן בתוך הפנים של α, ואנחנו יודעים ששם האינדקס תמיד 1. לכן נשאר להבין מדוע $\mathrm{Res}\left(\frac{f}{f'},p\right)$ שווה בדיוק לריבוי של p כאפס של f. נשים לב שלנגזרת הלוגריתמית של f ($\frac{f'}{f}$) יש תכונה יפה:

$$\frac{\left(\varphi\psi\right)'}{\varphi\psi}=\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{\psi'}{\psi}$$

נשתמש בכל כשנכתוב עבור p שבה $f\left(p\right)=0$:

$$f\left(z\right)=\left(z-p\right)^k g\left(z\right)$$

כאשר $g\left(p\right)\neq 0$ אנליטית. k הוא הריבוי של p. כעת,

$$\frac{f'}{f}=\frac{k\left(z-p\right)^{k-1}}{\left(z-p\right)^k}+\frac{g'\left(z\right)}{g\left(z\right)}=\frac{k}{z-p}+\frac{g'\left(z\right)}{g\left(z\right)}$$

$$\frac{f'}{f}-\frac{k}{z-p}=\frac{g'\left(z\right)}{g\left(z\right)}$$

הפונקציה באגף ימין היא גזירה בנקודה p, ולכן מההגדרה שלנו לשארית נקבל $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},p\right)=k$. לכן סיימנו. ■

משפט 1.2 (משפט רושה) נניח כי α,U כמו בעקרון הארגומנט, ויהיו f,g אנליטיות על U כך שלכל $z\in\mathrm{Im}\alpha$ מתקיים

$$\left|f\left(z\right)-g\left(z\right)\right|<\left|f\left(z\right)\right|+\left|g\left(z\right)\right|$$

אזי יש לפונקציות f,g אותו מספר אפסי בפנים של α.

הוכחה: נשים לב שמהתנאי נובע כי f,g לא מתאפסות על α - אחרת היה בנקודת ההתאפסות אי שוויון חלש. נפעיל את עקרון הארגומנט - נרצה להראות שבתנאים הללו מתקיים

$$\int\limits_{\alpha}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{\alpha}\frac{g'}{g}\,\mathrm{d}z$$

בתרגיל הבית ראינו כי

$$\int\limits_{\alpha}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{f\circ\alpha}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

ולכן מספיק להראות

$$\int\limits_{f\circ\alpha}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{g\circ\alpha}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

ולכן מספיק להוכיח שהמסילות $f\circ\alpha,g\circ\alpha$ הומוטופיות מחוץ לנקודה 0, וינבע השוויון. נתבונן בהומוטופיה:

$$H\left(t,s\right)=\left(1-s\right)f\left(\alpha\left(t\right)\right)+sg\left(\alpha\left(t\right)\right)$$

ונראה שההנחה משפט רושה מתורגמת לכך שזו לא מתאפסת באף שלב. אכן, נזכור שאם $a,b\in\mathbb{C}$ אזי $|a+b|\leq|a|+|b|$, כאשר שוויון מתקיים אם ורק אם $a=tb$ כאשר $t\in\mathbb{R}$ אי שלילי. אם נחליף $b\to-b$, נקבל

$$|a-b|\leq|a|+|b|$$

ושוויון אם ורק אם $a=tb$ עבור $t\in\mathbb{R}$ אי חיובי. נניח בשלילה כי $H\left(t_0,s_0\right)=0$, אזי

$$\left(1-s_0\right)f\left(\alpha\left(t_0\right)\right)+s_0g\left(\alpha\left(t_0\right)\right)=0$$

מעבירים אגפים ומקבלים שאחד מבין $f\left(\alpha\left(t_0\right)\right),g\left(\alpha\left(t_0\right)\right)$ הוא כפולה של השני בממשי שלילי - בסתירה להנחה. לכן סיימנו. ∎

נראה כעת שימוש קלאסי של משפט רושה - נוכיח את המשפט היסודי של האלגברה (שוב). יהי

$$f\left(z\right)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

פולינום. נגדיר $g\left(z\right)=z^n$. ניקח R מספיק גדול כך שמתקיים $R>1$ וגם

$$R>\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|$$

נראה שעבור R כזה תנאי משפט רושה מתקיימים על המסילה $\alpha = \{|z| = R\}$. אכן,

$$|f(z) - g(z)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i |z|^i < \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| R^{n-1} < R^n$$

ולכן נקבל שיש אותו מספר התאפסויות של f, g בתחום - כלומר f מתאפסת, כי g מתאפסת באפס.