תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

7 במאי 2017

משפט 0.1 תהי U פתוחה, $p \in U$, ותהי f גזירה על $U \setminus \{p\}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל סביבה קמורה V של p בתוך U, קיימת F גזירה על $V \setminus \{p\}$ עם $F' = f$.
2. קיימת סביבה V של p בתוך U שעליה קיימת F שגזירה על $V \setminus \{p\}$ עם $F' = f$.
3. קיים מעגל $\alpha \subseteq U$ המכיל את p בפנימו, ופנימו מוכל בתוך U, ומקיים
$$\int_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$
4. לכל מעגל $\alpha \subseteq U$ המכיל את p בפנימו ופנימו מוכל בתוך U מתקיים
$$\int_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$
5. לכל משולש $\Delta \subseteq U$ המכיל את p בפנימו ופנימו מוכל בתוך U מתקיים
$$\int_{\Delta} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

בנוסף, התנאי $\lim_{z \to p} f(z)(z-p) = 0$ גורר את קיום התנאים הללו.

הוכחה: $2 \Leftarrow 1$: ברור.

$3 \Leftarrow 2$: ניקח מעגל α שמוכל כולו בתוך V. יש F שמקיימת $F' = f$ על המעגל, והמעגל הוא מסילה סגורה, ולכן
$$\int_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

$4 \Leftarrow 3$: ניקח הומוטופיה של המעגל שנתון שיש לנו למעגל אחר. הומוטופיה משמרת אינטגרלים ולכן סיימנו.

$5 \Leftarrow 4$: אותו שיקול בדיוק של הומוטופיה.

$1 \Leftarrow 5$: זוהי בדיוק התוספת החשובה שהוכחנו סביב משפט גורסה.

הטענה על התנאי המספיק הוכחנו במסגרת אותו דיון. ■

הגדרה 0.2 כאשר התנאים מהמשפט הקודם מתקיימים, אומרים כי p היא נקודת סינגולריות אינטגרבילית לפונקציה f.

כאשר ניתן להגדיר את f בנקודה p כך שהפונקציה f תהיה גזירה גם בנקודה p, אומרים כי p נקודה סינגולרית סליקה.

דוגמא בתחום $U=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, עבור $f(z)=\frac{1}{z}$, 0 אינה נקודת סינגולריות אינטגרבילית. עבור $f(z)=\frac{1}{z^2}$ היא כן - ניקח $F(z)=-\frac{1}{z}$.

משפט 0.3 תהי U פתוחה, $p\in U$, ופונקציה f גזירה על $U\setminus\{p\}$. אזי <u>קיים</u> a <u>יחיד</u> כך שהנקודה p היא נקודה סינגולרית אינטגרבילית של $f-\frac{a}{z-p}$ (על U). ערך זה נקרא <u>השארית</u> של f בנקודה p, ומסומן

$$\operatorname{Res}(f,p)=a$$

ניתן לחשב אותו על ידי

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}f(z)\,\mathrm{d}z$$

כאשר α מעגל המכיל את p ומוכל (עם פנימו) בתוך U.

הוכחה: נשים לב כי אם p סינגולרית אינטגרבילית לפונקציה $f(z)-\frac{a}{z-p}$, אזי לכל מעגל α שמכיל את p ומוכל עם פנימו בתוך U מתקיים

$$0=\int\limits_{\alpha}\left(f(z)-\frac{a}{z-p}\right)\mathrm{d}z=\int\limits_{\alpha}f(z)\,\mathrm{d}z-\int\limits_{\alpha}\frac{a}{z-p}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{\alpha}f(z)\,\mathrm{d}z-2\pi ia$$

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}f(z)\,\mathrm{d}z$$

לכן ברור כי אם קיים a כזה, אזי הוא נקבע ביחידות. מצד שני, אם נבחר את a לפי הנוסחה הזו, עבור מעגל מסויים α, נובע מכל השוויונות שעשינו שהמעגל α מקיים

$$\int\limits_{\alpha}\left(f(z)-\frac{a}{z-p}\right)\mathrm{d}z=0$$

ולכן p אכן נקודה סינגולרית אינטגרבילית של $f(z)-\frac{a}{z-p}$ - הראינו את תנאי 3 במשפט הקודם. ■

בדוגמאות הקודמות:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z},0\right)=1$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2},0\right)=0$$

טענה 0.4 בסיטואציה של המשפט הקודם, אם מתקיים

$$\lim_{z\to p} f\left(z\right)\left(z-p\right)=a$$

אזי $a=\operatorname{Res}\left(f,p\right)$.

הוכחה: בודקים שהפונקציה $f\left(z\right)-\frac{a}{z-p}$ מקיימת את התנאי המספיק שבסוף המשפט הראשון שראינו בהרצאה זו:

$$\lim_{z\to p}\left(f\left(z\right)-\frac{a}{z-p}\right)\left(z-p\right)=\lim_{z\to p} f\left(z\right)\left(z-p\right)-a=a-a=0$$

ולכן סיימנו. ∎

מסקנה 0.5 (תרגיל קל) נניח כי f,g גזירות גזירות בתחום U, אבל $g\left(p\right)=0$, כאשר $g'\left(p\right)\neq 0$. אזי

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g},p\right)=\frac{f\left(p\right)}{g'\left(p\right)}$$

אם עוברים שוב על כל תורת האינטגרציה שפיתחנו, רואים שהכל עובר לפונקציות גזירות על U עם נקודת סינגולריות אינטגרבילית $p\in U$. יש להיזהר רק מהדברים הבאים:

1. p אינה נקודת הפתיחה או הסיום של המסילה α.

2. אסור לקחת "נקודות דגימה" t_i עבורן $\alpha\left(t_i\right)=p$ בחישובי $F\left(\alpha\left(t_{i+1}\right)-\alpha\left(t_i\right)\right)$.

<u>כן מותר</u> שהמסילה αתעבור בנקודה p.

דוגמא אפשר לחשב ולקבל

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{z}\mid_{-1}^{1}=-2$$

בהתאמה הזו, כל ההוכחות שעשינו תופסות, ובאותה צורה אפשר להניח שיש מספר סופי של נקודות סינגולריות אינטגרביליות לפונקציה f בתוך U. בפרט, מקבלים את המשפט הבא:

משפט 0.6 נניח כי $\{p_1,\ldots,p_n\}\subseteq U$, f גזירה על $U\backslash\{p_1,\ldots,p_n\}$ שכל p_i נקודה סינגולרית אינטגרבילית שלה, α,β לולאות הומוטופיות בתוך U, אזי

$$\int_{\alpha} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\int_{\beta} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

בפרט, אם α כוויצה בתוך U אזי

$$\int_{\alpha} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

ומכאן נקבל משפט מאוד חשוב:

משפט 0.7 (משפט השארית) נניח כי $f : U \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to \mathbb{C}$ גזירה, α מסילה בתוך U שאינה עוברת באף אחת מהנקודות p_i, ושהיא כוויצה בתחום U. אזי

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_i) \operatorname{Ind}_{\alpha}(p_i)$$

הוכחה: נגדיר את הפונקציה

$$\tilde{f}(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{Res}(f, p_i)}{z - p_i}$$

כעת, כל p_i היא נקודה סינגולרית אינגטרבילית של $\tilde{f}$, כי היא כזו עבור $f(z) - \frac{\operatorname{Res}(f,p_i)}{z-p_i}$, ושאר המחוברים אינטגרביליים בסביבת p_i. לכן נפעיל את המשפט הקודם עבור המסילה הכוויצה α ולקבל

$$\int\limits_{\alpha} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

כלומר

$$\int\limits_{\alpha} f(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{Res}(f, p_i)}{z - p_i}\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_i) \int\limits_{\alpha} \frac{1}{z - p_i}\,\mathrm{d}z = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_i)\, 2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_{\alpha}(p_i) = \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_i) \operatorname{Ind}_{\alpha}(p_i) \end{aligned}$$

■