תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

4 במאי 2017

תזכורת בהינתן לולאה (מסילה סגורה) α ונקודה $z \notin \mathrm{Im}\alpha$, מגדירים (יש הגדרה שקולה שראינו) את האינדקס $\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)$ להיות

$$\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

הוכחנו שאם α,β הומוטופיות בתחום $\mathbb{C}\backslash\left\{z\right\}$ אזי $\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)=\mathrm{Ind}_{\beta}\left(z\right)$ - זה נבע ממשפט כללי:

משפט 0.1 (קושי) אם $\alpha\sim\beta$ בתחום U, f גזירה בתוך U, אזי

$$\int\limits_{\alpha}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=\int\limits_{\beta}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w$$

ולוקחים $f\left(w\right)=\frac{1}{w-z}$.

מסקנה 0.2 אם γ מסילת מעגל היחידה סביב 0, למשל $\gamma\left(t\right)=e^{2\pi it}$, אזי γ אינה כוויצה בתחום $\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$.

זה נובע מיידית מהמשפט הקודם, ומכך שחישבנו שמתקיים $\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(0\right)=1$ (בעוד עבור מסילה כוויצה נובע מהמשפט שתמיד $\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(0\right)=0$).

מסקנה 0.3 נסמן $D=\left\{|z|\leq1\right\}$ את דיסק היחידה. אזי לא קיימת $f:D\to S^{1}$ רציפה המקיימת $f\mid_{S^{1}}=\mathrm{id}$.

הוכחה: נניח שהייתה כזו, ונוכיח שניתן אז לכווץ את מסילה המעגל γ בתוך $\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$ (ולמעשה בתוך S^{1}). אכן, תהי

$$H\left(t,s\right)=e^{2\pi it}\left(1-s\right)$$

כווץ של מעגל היחידה לאפס בתוך D. נגדיר כעת $\hat{H}\left(t,s\right)=f\circ H\left(t,s\right)$. זהו כיווץ של מסילת המעגל <u>על המעגל</u> ובפרט בתוך $\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$. זו סתירה. ■

משפט 0.4 (משפט נקודת השבת של בראוור ־ המקרה הדו מימדי) לכל $g: D \to D$ רציפה קיימת נקודת שבת, כלומר קיים $x \in D$ עם $g(x) = x$. המשפט נכון לכדור היחידה בכל מימד, אבל בכלים שלנו נראה את המקרה הדו מימדי.

הוכחה: נראה שאם קיימת g כזו ללא נקודת שבת, ניתן למצוא f שסותרת את המסקנה הקודמת. בהינתן נקודה x, נגדיר את $f(x)$ להיות נקודת החיתוך של מעגל היחידה עם הקו המחבר בין x לבין $g(x)$. ברור שהיא רציפה, וברור שהיא הזהות על המעגל עצמו. זו סתירה למסקנה הקודמת. ∎

טענה 0.5 ניתן כעת כמה תכונות של האינדקס. תהי α לולאה בתוך קבוצה פתוחה U.

1. האינדקס הוא תמיד מספר שלם.
2. לכל $z \notin \mathrm{Im}\alpha$ קיימת סביבה שעליה האינדקס נשאר קבוע. לכן, האינדקס קבוע על מרכיבי הקשירות של $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}\alpha$.
3. עבור $|z|$ גדול מספיק, האינדקס מתאפס.
4. כאשר $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ סכום של לולאות (במובן שהגדרנו), מתקיים $\mathrm{Ind}_\alpha(z) = \sum \mathrm{Ind}_{\alpha_i}(z)$.
5. לכל k נגדיר $\alpha^{(k)} := \{z \in U \mid \mathrm{Ind}_\alpha(z) = k\}$. אזי לכל $k \neq 0$ הקבוצה $\alpha^{(k)}$ חסומה. השפה שלה מוכלת בתוך $\mathrm{Im}\alpha$ והקבוצה $\alpha^{(k)} \cap U^c$ היא קומפקטית. בנוסף, רק עבור מספר סופי של ערכי k הקבוצה $\alpha^{(k)}$ אינה ריקה.

הוכחה: נוכיח כל תכונה.

1. הוכחנו (נובע מכך שניתן לתאר אותו כהפרש של בחירת $\log$ באותה נקודה חלקי $2\pi i$).
2. דרך אחת להוכיח זאת היא לשים לב שעבור z_n שקרוב מספיק אל z, $\frac{1}{w-z_n}$ קרוב אל $\frac{1}{w-z}$, ולכן גם האינטגרלים קרובים. באופן פורמלי: ישנה סביבה V של z שעליה לכל $z_n \in V$ ולכל $w \in U$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{w-z_n} - \frac{1}{w-z}\right| < \frac{|2\pi i|}{2L}$$

כאשר L הוא הקבוע שמובטח לנו מהמשפט הבא, שהוכחנו בעבר: לכל מסילה α בתחום U קיים קבוע L כך שלכל f שחסומה על U על ידי M מתקיים

$$\left|\int_\alpha f(w)\, \mathrm{d}w\right| \leq LM$$

אזי האינדקס של α ביחס לנקודה z_n יכול לזוז בלכל היותר $\frac{1}{2}$ על פי המשפט:

$$\left|\int_\alpha \frac{1}{w-z_n} - \frac{1}{w-z}\, \mathrm{d}w\right| \leq L \cdot \frac{|2\pi i|}{2L} = |\pi i|$$

האינדקס הוא שלם, והוא זז לכל היותר בחצי, ועל כן הוא נשאר קבוע. כעת, אם שתי נקודות הן באותו רכיב קשירות, נוכל לחבר אותן במסילה, ולאורכה האינדקס לא ישתנה (שכן נוכל לנוע בצעדים קטנים מספיק וכל אחד מהם לא ישנה את האינדקס) ולכן האינדקס זהה בכל רכיב הקשירות.

3. נבחר סביבה קטנה של המסילה α, V, ואז כאשר בוחרים $|z|$ גדול מספיק, כך שהגודל $\frac{1}{w-z}$ מספיק קטן על V, מקבלים שהאינטגרל שמגדיר את האינדקס חסום על ידי 1, אבל הוא שלם, ולכן 0. באופן פורמלי: יהי L הקבוע המתאים למסילה α והסביבה V (כמו קודם - אם הפונקציה חסומה על ידי M אז האינטגרל שלה על α חסום על ידי LM). אז לוקחים z מספיק גדול כך שלכל $w \in V$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{w-z}\right| \le \left|\frac{2\pi i}{L}\right| \frac{1}{2}$$

כעת לכל z כזה מתקיים

$$\left|\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)\right| \le \frac{1}{2}$$

ולכן האינדקס הוא 0.

4. נובע ישירות מההגדרה, כאשר מבצעים אינטגרציה של $\frac{1}{w-z}$ על המסילות.

5. העובדה שלכל $k \neq 0$ הקבוצה $\alpha^{(k)}$ חסומה נובעת מיידית מתכונה 3. נחפש את השפה. אם z_n סדרת נקודות עם $\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z_n\right) = k$, וכן $z_n \to z_0$, אזי $z_0 \in \mathrm{Im}\alpha$. אם היא לא, אזי בהכרח $\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z_0\right) = k$ כיוון שבסביבת z_0 האינדקס קבוע, והסדרה z_n נכנסת לכל סביבה כזו (טיעון זה נכון גם עבור $k = 0$). לכן נקודות הסגור של $\alpha^{(k)}$ הן או בקבוצה או בתוך $\mathrm{Im}\alpha$, ועל כן השפה מוכלת בתוך $\mathrm{Im}\alpha$.
מדוע $\alpha^{(k)} \cap U^c$ קומפקטית? הוכחנו שהיא חסומה. יש להבין מדוע היא סגורה. יהיו $z_n \in \alpha^{(k)} \cap U^c$ סדרה עם $z_n \to z_0$. בהכרח, $z_0 \in U^c$ (כי U^c סגורה) ולכן $z_0 \notin \mathrm{Im}\alpha$. ראינו קודם שמכאן נובע כי $z_0 \in \alpha^{(k)}$. לכן $z_0 \in \alpha^{(k)} \cap U^c$, והקבוצה סגורה.
נראה שהקבוצה $\alpha^{(k)}$ היא ריקה פרט למספר סופי של ערכי k. נטען שקיים חסם על האינדקס של כל הנקודות מחוץ לקבוצה U. אכן, נגדיר $d = \frac{1}{2}d\left(\mathrm{Im}\alpha, U^c\right)$, ויהי L פרמטר האורך שמתאים למסילה α (אם פונקציה חסומה על U על ידי M אז האינטגרל שלה על α חסום על ידי LM). נגדיר

$$V = \left\{z \mid d\left(z, \mathrm{Im}\alpha\right) > d\right\}$$

וכעת נעריך:

$$\left|\frac{1}{w-z}\right| < \frac{1}{d}$$
$$\left|\mathrm{Ind}_{\alpha}\left(z\right)\right| \le \frac{1}{2\pi i} L \frac{1}{d}$$

לכן האינדקס של כל נקודה במשלים של U חסום.

■

הגדרה 0.6 יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום.

1. אומרים שהתחום U הוא פשוט קשר למסילות אם כל לולאה α בתוך U היא כוויצה (זוהי ההגדרה הסטנדרטית במרחבים טופולוגיים כלליים).
2. אומרים שהתחום U הוא פשוט קשר הומולוגית אם לכל לולאה α בתוך U ולכל $z \in U^c$ מתקיים $\operatorname{Ind}_{\alpha}(z) = 0$.
3. אומרים שהתחום U הוא פשוט קשר לפונקציות אם לכל f גזירה על U קיימת פונקציה קדומה גלובלית על U.
4. אומרים שהתחום U הוא פשוט קשר מישורית אם לכל פירוק $U^c = K \cup F$, כאשר האיחוד הוא זר, K קומפקטית, F סגורה, בהכרח מתקיים $K = \emptyset$.

משפט 0.7 (שהוכחתו תתפרס בחתיכות לכל אורך המשך הקורס) כל ההגדרות הללו שקולות.

כרגע, אנחנו יודעים להוכיח כמה דברים:

$1 \Rightarrow 2$: מסילה כוויצה היא בעלת אינדקס אפס .

$1 \Rightarrow 3$: הוכחנו את משפט קושי למסילות כוויצות - אם α כוויצה, f גזירה, אזי

$$\int_{\alpha} f = 0$$

יחד עם העובדה שכל מסילה היא כוויצה מקבלים:

משפט 0.8 אם U פושט קשר למסילות אזי לכל f גזירה על U מתקיים

$$\int_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

לכל מסילה α בתוך U.

בתרגיל הבית רואים שעבור α פוליגונלית, זה גורר שיש עבור f קדומה (עבור U קמורה, α משולש הוכחנו בכיתה).

$3 \Rightarrow 2$: לוקחים עבור $z \in U^c$ את $f(w) = \frac{1}{w-z}$. זו פונקציה שגזירה על U, ועל כן יש לה קדומה גלובלית על U. לכן האינטגרל שלה מתאפס, והאינדקס מתאפס.

$2 \Rightarrow 4$: זה בדיוק התוכן של השאלה האחרונה בתרגיל הבית האחרון: כאשר U אינה פשוטת קשר מישורית רואים שם איך לבנות לולאה שיש לה אינדקס חיובי ביחס לנקודה בתוך K, כאשר $U^c = K \cup F$, K קומפקטית, F סגורה והאיחוד זר.

$2 \Rightarrow 4$: נניח שקיימת לולאה α בתוך U וקיימת $z \in U^c$ עם $\operatorname{Ind}_{\alpha}(z) \neq 0$. נביט בקבוצה $K = \bigcup_{k \neq 0} \alpha^{(k)} \cap U^c$. ההנחה שלנו שקולה לכך שאותה K אינה ריקה. הוכחנו קודם שאותה K היא קומפקטית (הוכחנו לכל $k \neq 0$ באיחוד, אבל גם הוכחנו שיש רק מספר סופי של k כך שהמאוחד של k אינו ריק). נגדיר $F = \alpha^{(0)} \cap U^c$, וקיבלנו פירוק $U^c = K \cup F$ כך שהאיחוד זר, F סגורה, K קומפקטית ואינה ריקה.

כדי לסיים את הוכחת כל השקילויות, נוכיח בעתיד $3 \Rightarrow 1$ (משפט ההעתקה של רימן) וכן $2 \Rightarrow 3$ (משפט קושי ההומולוגי).