תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

16 במרץ 2017

נתחיל מיד במתמטיקה, לפני שנדון בדברים כלליים יותר.

משפט 0.1 (המשפט היסודי של האלגברה) יהי $p(z)$ פולינום מעל המרוכבים $\mathbb{C}$ שאינו קבוע. אז קיים לו שורש מרוכב ־ כלומר קיים $z_0 \in \mathbb{C}$ עבורו $p(z_0) = 0$.

הזיהוי הטבעי $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ על ידי $(a+bi) \leftrightarrow (a,b)$ מאפשר לדבר באופן טבעי על קבוצות פתוחות, סגורות או קומפקטיות בתוך $\mathbb{C}$. המרחק האוקלידי הרגיל "מתורגם" לערך מוחלט מרוכב באותה צורה, ולכן מושגים של התכנסות, רציפות וכדומה עבור פונקציות $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (או אולי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$).

בדיוק כמו במקרה הממשי (אותה הוכחה), מראים כי מכפלה, סכום, והפרש של פונקציות רציפות נותנים גם כן פונקציה רציפה. באותה צורה גם הופכי של פונקציה רציפה, היכן שהפונקציה לא מתאפסת, רציף. כמסקנה מכך נקבל בפרט שכל פולינום $p(z)$ הוא פונקציה רציפה.

הגדרה 0.2 תהי $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהי $f : U \to \mathbb{C}$ פונקציה. נאמר כי f רגולרית בנקודה $z_0 \in U$ אם קיים $k \geq 1$ שלם וכן φ רציפה בסביבה V של $0 \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים $a = \varphi(0) \neq 0$ וכן לכל z בתחום ההגדרה

$$f(z+z_0) = f(z_0) + z^k \varphi(z)$$

הגדרה שקולה ־ קיים הגבול הבא, והוא שונה מאפס:

$$\lim_{0 \neq z \to 0} \frac{f(z+z_0) - f(z_0)}{z^k}$$

עבור $k \geq 1$ כלשהו. למעשה נוכל לקחת את φ להיות הפונקציה שבגבול.

לפעמים נרצה לדייק ונגיד כי f רגולרית מסדר k בנקודה z_0. נשים לב כי k, אם קיים, נקבע ביחידות: נניח כי

$$f(z+z_0) = f(z_0) + z^k \varphi(z) = f(z_0) + z^m \psi(z) = f(z+z_0)$$

בלי הגבלת הכלליות $k \leq m$, ואז

$$\varphi(z) = z^{m-k} \psi(z)$$

ואם $m > k$ מקבלים סתירה לרציפות - יתקיים

$$\lim_{z\to 0}\varphi\left(z\right)=0$$

דוגמא כל פולינום לא קבוע הוא פונקציה רגולרית. לכל $z_0\in\mathbb{C}$ קבוע, $p\left(z+z_0\right)$ היא פולינום במשתנה z, שהאיבר החופשי שלו הוא $p\left(z_0\right)$. לכן $p\left(z+z_0\right)-p\left(z_0\right)$ היא פולינום במשתנה z ללא מקדם חופשי שאינה זהותית אפס. לכן קיים פולינום φ ושלם k עבורו

$$p\left(z+z_0\right)-p\left(z_0\right)=z^k\varphi\left(z\right)$$

טענה 0.3 נניח כי f רגולרית מסדר k בנקודה z_0 וכי $f\left(z_0\right)\neq 0$. אזי גם $\frac{1}{f}$ רגולרית בנקודה z_0 (ומאותו סדר k).

הוכחה: נבדוק את ההגדרה הגבולית שראינו:

$$\lim_{0\neq z\to 0}\frac{\frac{1}{f(z+z_0)}-\frac{1}{f(z_0)}}{z^k}=\lim_{0\neq z\to 0}\frac{\frac{1}{f(z_0)+z^k\varphi(z)}-\frac{1}{f(z_0)}}{z^k}=\lim_{0\neq z\to 0}\frac{-z^k\varphi\left(z\right)}{z^kf\left(z_0\right)\left(f\left(z_0\right)+z^k\varphi\left(z\right)\right)}=$$
$$=\lim_{0\neq z\to 0}\frac{-\varphi\left(z\right)}{\left(f\left(z_0\right)+z^k\varphi\left(z\right)\right)f\left(z_0\right)}=-\frac{\varphi\left(0\right)}{f\left(z_0\right)^2}$$

■

הערה 0.4 קל לראות מיידית מההגדרה שהזזה בקבוע של פונקציה רגולרית, בין אם הזזת הערך $f\to f+c$ ובין אם הזזת הערך $f\left(z\right)\to f\left(z+c\right)$, שומרת על רגולריות.

מסקנה 0.5 לכל פולינום $p\left(z\right)$, הפונקציה $\frac{1}{p(z)}$ רגולרית בכל נקודה z_0 המקיימת $p\left(z_0\right)\neq 0$.

משפט 0.6 (עקרון המקסימום) נניח כי $U\in\mathbb{C}$ פתוחה, ותהי $f:U\to\mathbb{C}$ פונקציה שהיא רגולרית בנקודה $z_0\in U$. אזי $\left|f\left(z\right)\right|$ אינו יכול לקבל מקסימום מקומי בנקודה z_0. זאת אומרת, לא קיימת סביבה V של z_0 כך שלכל $z\in V$ מתקיים

$$\left|f\left(z\right)\right|\leq\left|f\left(z_0\right)\right|$$

הוכחה: כיוון שהפונקציה f רגולרית בנקודה z_0, עבור $|z|$ קטן מספיק מתקיים

$$f\left(z+z_0\right)=f\left(z_0\right)+z^k\varphi\left(z\right)$$

טריוויאלי שכפל בסקלר מרוכב שאינו 0 לא משנה רגולריות. לכן, נוכל לכפול את f פי סקלר λ שמקיים $|\lambda|=1$ (כלומר הערך המוחלט לא משתנה), נוכל להניח, בלי הגבלת

הכלליות, כי $f(z_0) \geq 0$ ממשי אי שלילי. נסמן עתה $0 \neq a = \varphi(0)$. יהי $\alpha \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים $\alpha^k = a$ (תמיד קיים). נביט עתה בסדרת הערכים $z_n = \frac{1}{\alpha n} \to 0$. נסמן $\varphi(z) = a\psi(z)$, כאשר $\psi(0) = 1$, ויתקיים

$$f(z + z_0) = f(z_0) + az^k\psi(z)$$

עבור n גדול מספיק, $z_n + z_0$ נכנס לסביבת ההגדרה של f, ולכל סביבה V של z_0 שבה היא מקסימום מקומי (אם הייתה כזו). נציב כעת:

$$f(z_n + z_0) = f(z_0) + \frac{a}{(\alpha n)^k}\psi(z_n) = f(z_0) + \frac{1}{n^k}\psi(z_n)$$

כיוון שמתקיים $\psi(z_n) \to 1$, עבור n גדול מספיק, $\mathrm{Re}\psi(z) > 0$. לכן, לכל n גדול מספיק,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\psi(z_n)}{n^k}\right) > 0$$

לכן, אם נסמן $f(z_0) = t \geq 0$ ממשי, $w = \frac{\psi(z_0)}{n^k}$ עם $\mathrm{Re}(w) > 0$, קל לראות שחייב להתקיים

$$|t + w| > |t| = t$$

ולכן לכל n גדול מספיק $|f(z + z_n)| > |f(z_0)|$, ולכן z_0 אכן לא מקסימום מקומי. ■

מסקנה 0.7 (עקרון המינימום) תחת אותם תנאים, אם $f(z_0) \neq 0$, אין מינימום מקומי של $|f(z)|$ בנקודה z_0. באופן שקול, אם יש מינימום מקומי $|f(z)|$ בנקודה z_0, אזי $f(z_0) = z_0$.

הוכחה: הוכחנו כי אם $f(z_0) \neq 0$, כאשר f רגולרית בנקודה z_0, אזי גם $\frac{1}{f}$ רגולרית שם. כעת נשתמש בעיקרון המקסימום עבור $\frac{1}{f}$ בנקודה z_0. ■

דוגמא בממשיים,

$$p(x) = x^2 + 1$$

מקבל מינימום מקומי (ואף גלובלי) בנקודה $x = 0$. יש הבדל בין הממשיים למרוכבים.

כעת אנחנו מוכנים להוכיח את המשפט היסודי של האלגברה.

משפט 0.8 (המשפט היסודי של האלגברה) יהי $p(z)$ פולינום מעל המרוכבים $\mathbb{C}$ שאינו קבוע. אז קיים לו שורש מרוכב - כלומר קיים $z_0 \in \mathbb{C}$ עבורו $p(z_0) = 0$.

הוכחה: p פולינום לא קבוע, ולכן רגולרי בכל $\mathbb{C}$. נסמן $M=|p(0)|$. נשתמש בעובדה הפשוטה הבאה על פולינומים לא קבועים (שמופיעה בשיעורי הבית):

$$\lim_{z\to\infty}|p(z)|=\infty$$

זה אומר שקיים R מספיק גדול כך שאם $|z|\geq R$ אזי $|p(z)|\geq M$.

נביט בצמצום של $p(z)$ לכדור הסגור $\overline{B}_R(0)$ סביב 0 ברדיוס R. זהו קומפקט, והפונקציה $z\to|p(z)|$ רציפה, שכן ערך מוחלט פונקציה רציפה, והרכבה של רציפות רציפה. לכן הפונקציה $|p(z)|$ מקבלת מינימום בכדור הסגור, נניח בנקודה z_0. נשים לב שמתקיים

$$|p(z_0)|\leq|p(0)|=M$$

ומחוץ לכדור הסגור, לכל z מתקיים

$$|p(z)|>M$$

לכן לכל $z\in\mathbb{C}$

$$|p(z_0)|\leq|p(z)|$$

כלומר z_0 מינימום גלובלי של $|p(z)|$. כעת, p פולינום לא קבוע, כמו שאמרנו, ולכן רגולרית על כל $\mathbb{C}$. מעקרון המינימום, נובע כי בהכרח $p(z_0)=0$. ■

משפט 0.9 (עקרון ההעתקה הפתוחה) תהי $U\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה, ותהי $f:U\to\mathbb{C}$ העתקה רגולרית בכל U. אזי $f(U)\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה.

הוכחה: למעשה יש להוכיח שלכל $z_0\in U$, הקבוצה $f(U)$ מכילה כדור פתוח סביב $f(z_0)$.

תהי $z_0\in U$. על ידי הזזה בקבוע של f, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות כי $f(z_0)=0$. על ידי הזזת הארגומנט של הפונקציה, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות כי $z_0=0$.

מהנחת הרגולריות של f מתקיים

$$f(z+z_0)=f(z_0)+z^k\varphi(z)$$
$$f(z)=z^k\varphi(z)$$

נזכר שכחלק מהגדרת הרגולריות, φ רציפה, וכן $0\neq a=\varphi(0)$. לכן קיים $r>0$ כך שאם $|z|\leq r$ אזי $|\varphi(z)|\geq\frac{a}{2}$. לכן, כאשר $|z|=r$, מתקיים

$$\left|z^k\varphi(z)\right|\geq\left|r^k\frac{a}{2}\right|=:\alpha>0$$

נוכיח כעת שלכל $w\in\mathbb{C}$ עם $|w|<\frac{\alpha}{2}$, מתקיים $w\in f(U)$. באופן מדוייק יותר, $w\in f(B_r(0))$.

בהינתן w שכזה, נביט בפונקציה

$$g(z) = f(z) - w$$

זו כמובן פונקציה רגולרית, כהזזה של רגולרית. נביט בפונקציה $|g(z)|$ על $\overline{B}_r(0)$ - זהו קומפקט, ולכן $|g(z)|$ מקבלת עליו מינימום. נראה שמינימום זה לא מתקבל על שפת הכדור, ולכן חייב להתקיים בפנים הכדור - כלומר הוא מינימום מקומי. עקרון המינימום יבטיח כי $|g(z)| = 0$ בנקודת המינימום, כלומר

$$f(z) = w$$

כמו שרצינו.
אכן, לכל $|z| = r$, כלומר בשפת הכדור, מתקיים

$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

אבל

$$|g(0)| = |f(0) - w| = |0 - w| = |-w| = |w| < \frac{\alpha}{2}$$

לכן לא ייתכן שהמינימום על השפה, וסיימנו. ■

נעיר שעקרון ההעתקה הפתוחה גורר את עקרון המינימום ואת עקרון המקסימום בצורה די מיידית. כמו כן, הוא מראה שאין מקסימום גם לערך הממשי או המדומה, ועוד כל מיני עקרונות דומים.