פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 3

07.03.11

משוואות קושי רימן

תרגיל. f,g אנליטית בתחום $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$. הוכיחו $g = if + x_0$.

ראינו בשיעור שלפונקציה הולומורפית כל אחד מהבאים גורר שהיא קבועה:

$$\operatorname{Re} f \equiv const$$

$$\operatorname{Im} f \equiv const$$

$$|f| \equiv const$$

$$\arg f \equiv const$$

הוכחה. נגדיר $h = g + if$.

$$\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(g) - \operatorname{Im}(if) = \operatorname{Im} g - \operatorname{Re} f = 0$$

ממסקנה מקושי–רימן $h \equiv x_0 \in \mathbb{R}$ ולכן $g = x_0 + if$.

$\square$

תרגיל. $f = u + iv$ הולומורפית. $v = g(u)$ כאשר $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. הוכיחו כי f קבועה.

הוכחה. $v = g(u)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} : v_x = g'(u) u_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : v_y = g'(u) u_y$$

לפי קושי רימן:

$$g'(u) u_x + u_y = 0$$

$$g'(u u_y) - u_x = 0$$

$$\begin{pmatrix} g'(u) & 1 \\ -1 & g'(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\det = g'(u)^2 + 1 > 0$$

לכן

$$u_x = u_y = 0$$

לפי קושי רימן גם

$$v_x = v_y = 0$$

לכן,

$$v \equiv const \quad u \equiv const$$

ולכן $f \equiv const$. $\square$

תרגיל. נתון $|a|, |z| < 1$ הוכיחו

$$|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}| < 1$$

הוכחה. נגדיר:

$$f(x) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad z \neq \frac{1}{\overline{a}}$$

צריך להראות

$$f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$$

כאשר $\mathbb{D}$ דיסק יחידה פתוח.
f רציפה.

טענה. $|f(z)| = 1 \Rightarrow |z| = 1$

$$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \Leftrightarrow z - a = w - \overline{a}wz \Leftrightarrow z(1+\overline{a}w) = w + a \Leftrightarrow z = \frac{w+a}{1+\overline{a}w}$$

במילים אחרות אם $w = f(z) \in S^1$ אז $z \in S_1$.

$$|z| = |\frac{w+a}{1+\overline{a}w}| = \frac{|w+a|}{|w^{-1}+\overline{a}||w|} \underbrace{=}_{|w|=1} \frac{|w+a|}{|w+a|} = 1$$

$\mathbb{D}$ תחום. לכן $f(\mathbb{D})$ היא קבוצה קשירה מסילתית. (פונקציה רציפה מעבירה קבוצה קשירה מסילתית לקבוצה קשירה מסילתית)
לכן אם ב- $f(\mathbb{D})$ יש נקודות w_1, w_2 $|w_1| < 1, |w_2| > 1$

$$|w| = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{טענה}} w = f(z), |z| = 1$$

הוכחנו כי $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ או ש- $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ ולכן מספיק לבדוק נקודה אחת:
$f(a) = 0$, $|a| < 1$, $a \in \mathbb{D}$ לכן האופציה הראשונה. $\square$

פונקציות הרמוניות

הגדרה. פונקציה הרמונית $u : D \to \mathbb{R}$ כך ש-

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

אינטואיטיבית לפלסיאן זה ההפרש בין ממוצע הפונקציה בסביבת הנקודה לערך שלה בנקודה.

תרגיל. מתי הפולינום $p = ax^2 + bxy + cy^2$ הוא פונקציה הרמונית?

הוכחה.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2ax + by \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 2cy + bx$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2a \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2c$$

ולכן

$$\Delta p = 0 \Leftrightarrow 2a + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -c$$

ואז,

$$p(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy$$

$\square$

הערה. הפונקציות ההרמוניות הן מרחב לינארי.

משפט.

1. $f : D \to \mathbb{C}$ הולומורפית אז $v = \operatorname{Im} f$, $u = \operatorname{Re} f$ פונקציות הרמוניות ב- D. ואז u, v נקראות פונקציות הרמוניות צמודות.

   אם ל- u יש צמודה v בתחום D ($f = u + iv$) אז v מוגדרת ביחידות עד כדי קבוע חיבורי.

2. עבור $D = \mathbb{C}$ תמיד יש פונקציה צמודה.

   (סימון $\frac{1}{2}$–סטנדרטי $v = u^*$).

תרגיל. $u(z) = \log|z|$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. הוכיחו ש-$u$ פונקציה הרמונית ללא פונקציה צמודה.

הוכחה. יש ללפלסיאן נוסחא בקורדינטות פולריות

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

נציב

$$\Delta \log \underbrace{|z|}_{=r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{1}{r}) = 0$$

נראה של- u אין פונקציה v צמודה. $f = u + iv$ הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
גם לקושי רימן יש צורה פולארית:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ולכן

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

כלומר, v קבועה לאורך קרניים חיוביות דרך הראשית.

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

ולכן

$$0 = v(e^{i2\pi} - v(e^{i\cdot 0}) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta = 2\pi$$

וזו סתירה. לכן v לא קיימת. $\square$

חישובים עם $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

משוואות קושי רימן מקבלות את הצורה:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

בשיעורי בית נוכיח

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}$$

תרגיל. $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית, $f\neq 0$, f' הולומורפית. הוכיחו כי $u=\log|f|$ היא פונקציה הרמונית.

הוכחה. מספיק להראות ש- $2u=\log|f|^2$ פונקציה הרמונית.
משהו נחמד על הלפלסיאן:

$$\Delta=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

נחשב:

$$\Delta(2u)=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}(\log f\overline{f})=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\frac{\partial}{\partial z}(f\overline{f})}{f\overline{f}}=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}+f\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}{f\overline{f}}$$

נסוחא מתרגיל בית:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$$

כי f הולומורפית ומקושי רימן.

$$=5\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{f'}{f})=0$$

לכן $2u$ פונקציה הרמונית ולכן גם u. □