פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 2

28.02.11

נגזרת מרוכבת

הגדרה. אם $f : U \to \mathbb{C}$, U קבוצה פתוחה, $z_0 \in U$. נאמר ש- f גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

באופן שקול, f גזירה ב- z_0 אם קיימת הצגה, $A \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(||z - z_0|), \quad z \to z_0$$

$f(z_0)$ הזזה, $A\cdot$ מתיחה וסיבוב
אז מקומית f נראית כמו הזזה, מתיחה וסיבוב.

תרגיל. הוכיחו כי $f(z) = |z|$ אינה גזירה באף נקודה.

הוכחה.

$$f^2 = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

ולכן עבור $z \neq 0$,

$$\overline{z} = \frac{f^2(z)}{z}$$

לכן אם f גזירה ב- z_0 אז גם $\overline{z}$ גזירה ב- z_0 וזו סתירה. נותרה הנקודה $z_0 = 0$. עבור נקודה זו הצמצום של $|z|$ ל- $\mathbb{R}$ אינה גזירה. לכן הפונקציה לא גזירה ב- $\mathbb{C}$. $\square$

משוואות קושי–רימן

אם f גזירה ב- z_0, $f = u + iv$, $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ מקיימת את המשוואות:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$

$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

זה תנאי הכרחי אבל לא מספיק. בדקנו שאיפה רק בשני כיוונים. התנאי הזה יהיה מספיק אם f דיפרנציאבילית במובן הממשי ב- z_0.
נגדיר $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $\xi \in \mathbb{C}$ נכתוב:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

תרגיל. f גזירה ב- z_0 אז:

$$\frac{\partial f}{\partial (i\xi)}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial \xi}(z_0)$$

הוכחה.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \langle \nabla u, \xi \rangle$$

$$\frac{\partial u}{\partial (i\xi)} + i\frac{\partial v}{\partial (i\xi)} \stackrel{?}{=} i(\frac{\partial u}{\partial \xi}) + i\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\begin{cases} (1)\,\frac{\partial u}{\partial (i\xi)} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial v}{\partial \xi} \\ (2)\,\frac{\partial v}{\partial (i\xi)} \stackrel{?}{=} \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{cases}$$

נבדוק את (1):

$$\langle \nabla u, i\xi \rangle \stackrel{?}{=} -\langle \nabla v, \xi \rangle$$

$$\xi = \xi_x + i\xi_y$$

$$i\xi = -\xi_y + i\xi_x$$

$$\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\xi_y \\ \xi_x \end{pmatrix} \rangle \stackrel{?}{=} -\langle \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \rangle$$

$$-u_x\xi_y + u_y\xi_x \stackrel{?}{=} -\xi_x v_x - v_y\xi_y$$

$$\xi_x : u_y = -v_x$$

$$\xi_y : -u_x = -v_y$$

משוואות קושי-רימן

$\square$

הערה.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(z_0) = f'(z_0) \cdot \xi$$

תרגיל. עבור אילו ערכי z הפונקציה $f(z)=\overline{z}^2$ גזירה?

פתרון:

$$f(x+iy)=(x-iy)^2=x^2-y^2+i(-2xy)$$

$$u=x^2-y^2 \qquad v=-2xy$$

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

נכתוב משוואות קושי־רימן, תנאי הכרחי (בינתיים לא נשתמש מתי הוא מספיק) לגזירות:

$$\begin{cases}2x=-2x\\ -2y=2y\end{cases}$$

f גזירה ב־z $\Leftarrow$ $z=0$.
עבור $z=0$,

$$f(z)=\overline{z}^2=o(|z|)$$

$$|f|=|z|^2=o(|z|) \quad z\to 0$$

לכן לפי הגדרה f גזירה ב־0 ו־$f'(0)=0$.

תרגיל. $h:[0,1]\to\mathbb{C}$ רציפה, נגדיר:

$$f(z)=\int_0^1 \frac{h(t)}{t-z}dt$$

הוכיחו ש־ f גזירה ב־ $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

הערה. אינטגרל מרוכב על קטע ממשי:

$$\int_a^b (u(t)+iv(t))dt := \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

תחת ההגדרה הזאת כל התכונות של אינטגרל נשמרות:

$$\int_a^b f+g=\int f+\int g$$
$$\lambda\in\mathbb{C} \quad \int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f$$

$\int_a^b;(\mathbb{C}\to\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ וזה אופרטור לינארי.

הוכחה. נבחר z_0.

$$f(z)-f(z_0)=\int_0^1\left(\frac{h(t)}{t-z}-\frac{h(t)}{t-z_0}\right)dt=\int_0^1\frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)}dt=$$
$$=(z-z_0)\int_0^1\frac{h(t)dt}{(t-z)(t-z_0)}$$

נראה כי:

$$\int_0^1\frac{h(t)dt}{(t-z)(t-z_0)}\xrightarrow{z\to z_0}\int_0^1\frac{h(t)dt}{((t-z_0)^2}$$

נראה שרצף הפונקציות $\frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)}$ מתכנס במידה שווה ל- $\frac{h(t)}{(t-z_0)^2}$ כאשר $z\to z_0$ בקטע $t\in[0,1]$.

$$\frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)}-\frac{h(t)}{(t-z_0)^2}=\frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z_0)^2(t-z)}$$

h רציפה ב- $[0,1]$ אז היא חסומה: $|h|\le M$. כמו כן, $z_0\notin[0,1]$ לכן $d=dist(z_0,[0,1])>0$ $[0,1]$ היא קבוצה קומפקטית, המרחק הוא רציף. נותר לומר כי

$$|t-z_0|\ge d$$

נניח כי $|z-z_0|\le\frac{d}{2}$ ואז

$$|t-z|\ge|t-z_0|-|z-z_0|\ge\frac{d}{2}$$

לכן

$$\left|\frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z_0)^2(t-z)}\right|\le\frac{M}{d^2\frac{d}{2}}|z-z_0|\xrightarrow{z\to z_0}0$$

ההתכנסות היא במ"ש לכן האינטגרלים $\int_0^1$ מתכנסים כאשר $z\to z_0$. לכן יש גזירות וכן:

$$f'(z_0)=\int_0^1\frac{h(t)}{(t-z_0)^2}dt$$

□

תרגיל. $f(x,y)=3x+y+(3y-x)i$ מצאו נקודות גזירות במובן המרוכב של f.

הוכחה.

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}\qquad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$$f(z)=\frac{3}{2}(z+\overline{z})-\frac{i}{2}(z-\overline{z})+i\left(-\frac{3}{2}i(z-\overline{z})-\frac{z-\overline{z}}{2}\right)=$$
$$=z\left(\frac{3}{2}-\frac{i}{2}+\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\right)+\overline{z}\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\right)=(3-i)z$$

ולכן f גזירה ו- $f'(z)=3-i$ □