פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 1

21.02.11

הצגה קוטבית

נייצג מספר מרוכב ע"י מרחק וכיוון $0 \neq z \in \mathbb{C}$.
מציגים:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

כאשר $r = |z|$
ו־ θ היא הארגומנט של z, מוגדר עד כדי הוספת 2π.

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$

בצורה כזאת נוח לעשות כפל. ראינו:

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\
&\quad = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1) = \\
&\qquad = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

לכן נוח גם לעשות חזקה:
כלל DeMoivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

סימון: עבור $\theta \in \mathbb{R}$ נסמן:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

נקודה על מעגל היחידה עם ארגומנט θ.
כעת הצגה קוטבית:

$$z = re^{i\theta}$$

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

תרגיל 1
מצאו את $\sqrt[5]{1-i}$.
מה הכוונה? רוצים $\{z\in\mathbb{C}:z^5=1-i\}$.
ראינו שלכפל וחזקה עדיף להשתמש בהצגה קוטבית. ננסה:

$$|i-1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

תמיד $\arg(x+iy)=\arctan\frac{y}{x}(\mod \pi)$

$$\mathrm{Arg}(1-i)=\arctan\frac{\mathrm{Im}(1-i)}{\mathrm{Re}(1-i)}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

נניח $z=re^{i\theta}$ כך ש- $z^5=1-i$

$$(re^{i\theta})^5=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$r^5e^{i5\theta}=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

וזה נכון אם ורק אם

$$r^5=\sqrt{2}$$

$$5\theta=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$r=2^{1/10}$$

$$\theta=-\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

מעוניינים ב-θ מדולו 2π לכן חמישה פתרונות שונים:

$$\theta_1=-\frac{\pi}{20}$$

$$\theta_2=-\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi$$

$$\vdots$$

$$\theta_5 = -\frac{\pi}{20} + \frac{8}{5}\pi$$

והפתרון הבא שווה לראשון.
לכן יש חמישה שורשים ל- $z^5 = 1 - i$ והם $j = 1, \ldots, 5$ $2^{1/10}e^{i\theta_j}$.
באופן כללי לכל $a \neq 0$, n טבעי יש בדיוק n שורשים ל- $z^n = a$. למה? רושמים את a בקורדינטות פולריות וחוזרים על החישוב.
תרגיל 2: חשבו את $\arg(e^{\bar{i}\alpha} + 1)$ עבור $0 < \alpha < \pi$
פתרון:

$$e^{\bar{i}\alpha} = e^{-i\alpha}$$

צריכים את $\arg(1 + e^{-i\alpha})$.

$$\mathrm{Arg}(1 + e^{-i\alpha}) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(1 + e^{-i\alpha})}{\mathrm{Re}(1 + e^{-i\alpha})}\right)(\mod \pi) =$$

$$= \arctan\left(\frac{-\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\right) = -\frac{\alpha}{2}$$

לכן,

$$\mathrm{Arg}(e^{\bar{i}\alpha} + 1) = -\frac{\alpha}{2}\text{או} - \frac{\alpha}{2} + \pi$$

צריך להבין באיזה רביע $e^{\bar{i}\alpha} + 1$. ראינו ש-

$$\mathrm{Re}(e^{\bar{i}\alpha} + 1) = 1 + \cos\alpha > 0$$

$$\mathrm{Im}(e^{\bar{i}\alpha} + 1) = -\sin\alpha < 0$$

לכן, $\mathrm{Arg}(e^{\bar{i}\alpha} + 1) = -\frac{\alpha}{2}$
תרגיל 4: למצוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות כך ש-

$$z^2 = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

פתרון: נרשום $z = x + iy$. ואז:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

כלומר

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

וזה מעגל ברדיוס 1 סביב $(1, 0)$.

$$\{z\in\mathbb{C}: |z-1|=1\}$$

תרגיל 5: הוכיחו:

$$\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$$

$$|z|=1 \text{או} z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

פתרון:
$\Leftarrow$: אם $z\in\mathbb{R}$ ברור ש- $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$.
אם $|z|=1$ אז

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\bar{z}$$

ולכן,

$$z+\frac{1}{z}=z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$: ידוע ש- $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$.

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$$

$$z+\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\bar{z}+\frac{z}{|\bar{z}|^2}$$

$$\Downarrow$$

$$z-\frac{z}{|z|^2}=\bar{z}-\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\Downarrow$$

$$z(1-\frac{1}{|z|^2})=\bar{z}(1-\frac{1}{|z|^2})$$

מתי z פתרון?
או ש- $|z|^2=1$ כלומר $|z|=1$. אחרת, $z=\bar{z}$ ולכן z ממשי.
תרגיל 6: להוכיח את הזהות:

$$\forall z,w\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad \left|\frac{z}{|z|}-|z|w\right|=\left|\frac{w}{|w|}-|w|z\right|$$

פתרון: נעלה בריבוע:

$$\left|\frac{z}{|z|}-|z|w\right|^2\overset{?}{=}\left|\frac{w}{|w|}-|w|z\right|^2$$

$$\left(\frac{z}{|z|}-|z|w\right)\left(\frac{\bar{z}}{|z|}-|z|\bar{w}\right)\stackrel{?}{=}\left(\frac{w}{|w|}-|w|z\right)\left(\frac{\bar{w}}{|w|}-|w|\bar{z}\right)$$

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2}-\frac{z}{|z|}|z|\bar{w}-|z|w\frac{\bar{z}}{|z|}+|z|^2w\bar{w}\stackrel{?}{=}\frac{w\bar{w}}{|w|^2}-\frac{w}{|w|}|w|\bar{z}-|w|z\frac{\bar{w}}{|w|}+|w|^2z\bar{z}$$

והכל מצטמצם.