פונקציות מרוכבות 1 - הרצאה 6

10.03.11

בשיעור שעבר ראינו שאם $f : G \to \mathbb{C}$ הולומורפית אז היא הרמונית, כלומר $\Delta f = 0$.
במילים אחרות אם $f = u + iv$ אז $\Delta u = \Delta v = 0$ כאשר $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
כמסקנה $u(x+iy) = x^2$ אינה החלק הממשי של שום פונקציה הולומורפית, הרי $\Delta u = 2 \neq 0$ לכן לא הרמוני ולא לא יכול להיות חלק ממשי של פונקציה הולומורפית.
מה לגבי $u(x,y) = x^2 - y^2$ האם היא יכולה להיות חלק ממשי של פונקציה הולומורפית? $\Delta u = 2 - 2 = 0$. כלומר זאת פונקציה הרמונית ולכן יש לה סיכוי להיות חלק ממשי של פונקציה הולומורפית. $f(x+iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$ זאת הפונקציה $f(z) = z^2$ והיא כמובן הולומורפית ו- $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$.

טענה. נניח $u : G \to \mathbb{C}$ (אולי אפילו $u : G \to \mathbb{R}$) הרמונית, -(גגזירה פעמיים ברציפות) $\mathbb{R}$ אזי $\frac{\partial u}{\partial z}$ היא פונקציה הולומורפית.

הוכחה. ניזכר ש-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta u$$

צ"ל ש- $g = |\frac{\partial u}{\partial z}|$ היא פונקציה הולומורפית. נבדוק שקושי-רימן $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ ואכן,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{1}{4}\Delta u = 0$$

□

הערה. גם הכיוון ההפוך נכון.

דוגמא. $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ הרמונית:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ובאמת $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ו- u הרמונית.
לכן,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}[\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}] = \frac{x - iy}{x^2+y^2}$$

וזאת פונקציה הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

מתי פונקציה הרמונית היא באמת החלק הממשי/ המדומה של פונקציה הולומורפית?

הגדרה. נניח $v, u : G \to \mathbb{R}$ פונקציה הרמונית. אומרים ש- v הוא הצמוד ההרמוני של u אם $u + iv$ פונקציה הולומורפית.

דוגמאות.

1. $u(x,y) = x^2 - y^2$ הצמוד שלה הוא $v(x,y) = 2xy$.
2. אם v צמוד של u אז $v + 12$ צמוד של u.
3. אם v צמוד של u אז $-u$ צמוד של v. למה? כי אם $u + iv$ הולומורפית אז $-i(u+iv) = v - iu$ הולומורפית.

משפט. תהי $u : G \to \mathbb{R}$ פונקציה הרמונית. אזי:

1. אם $G = \mathbb{C}$ קיים צמוד הרמוני.
2. לכל G הצמוד ההרמוני יחיד, עד כדי הוכחת קבוע.

בתחומים שאינם $\mathbb{C}$ לדוגמא, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ לאו דווקא יש צמוד הרמוני.

הוכחה.

1. נתונה u צריך למצוא v כך שיתקיים קושי רימן:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

כלומר צריך לשחזר את v עפ"י הנגזרת לפי x והנגזרת לפי y.

מהמשוואה הראשונה:

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt + c(x)$$

הפונקציה הזאת פותרת את המשוואה הראשונה. הפונקציה יחידה עד כדי קבוע אבל לכל x יכול להיות קבוע משלו. איך נבחר את $c(x)$ שיישאר חלק? ננסה לבחור $c(x)$ כך ש- $c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$.

נציב במשוואה השנייה:

תזכורת. איך גוזרים מתחת לסימן האינטגרל?

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$$

למשל כאשר הנגזרות החלקיות של f רציפות וחסומות.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dt + c'(x) =$$

$$= \int_0^y -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t)dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)] - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y}]$$

לכן משוואות קושי רימן מתקיימות. ל־v יש נגזרות חלקיות רציפות לכן $u + iv$ הולומורפית.

2. נניח $u + iv_1$, $u + iv_2$ פונקציות הולומורפיות. אז ההפרש $i(v_1 - v_2)$ פונקציה הולומורפית ולכן גם $v_1 - v_2$ הולומורפית. v_1, v_2 פונקציות ממשיות לכן גם ההפרש שלהן ממשי ופונקציה הולומורפית וממשית בתחום G היא בהכרח קבועה.

$\square$

ההוכחה עובדת גם ל־ G קמור כלשהו.

המון דוגמאות

אילו פונקציות הולומורפיות מכירים?

1. פונקציות לינאריות/ אפיניות$f(z) = az + b$. ראינו איך פונקציות כאלה מתנהגות.
2. פונקציות ריבועיות $f(z) = z^2$ $re^{i\theta} \to r^2e^{2i\theta}$. למשל הרביע הראשון יעבור לחצי העליון כולו. באופן כללי גזרה אינסופית תתרחב פי שתיים.
3. $z \mapsto z^2 + c$ יש גיאומטריה ודינמיקה די מסובכת עבור $c \neq 0$. ניקח לדוגמא $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

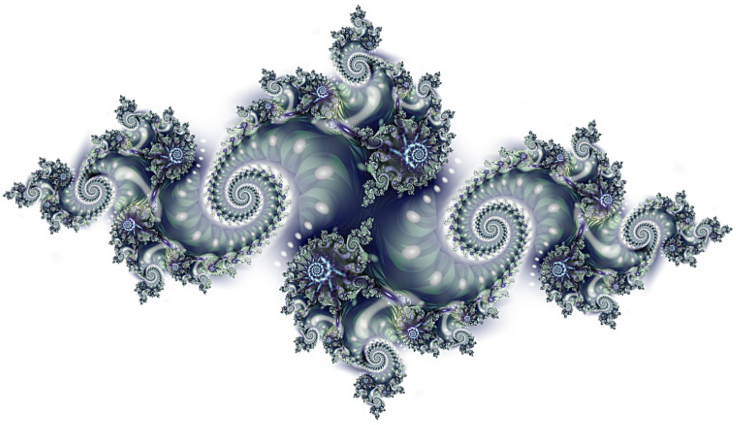
$$f(z) = z^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

מה זה דינמיקה? עבור $z \in \mathbb{C}$ נביט בסדרה:

$$z, f(z), f(f(z)), \ldots$$

נסמן ב־ $A \subseteq \mathbb{C}$ את קבוצת ה־ $z \in \mathbb{C}$ שעבורן הסדרה שואפת לאינסוף. לפונקציה לינארית קל לנתח את זה. אבל זה לא באמת כל כך פשוט.

לקבוצה ∂A קוראים קבוצת Julia.



כמעט לכל c יש תמונות יפות כאלה. זה אכן יפה אבל כנראה שלא היינו רוצים ללמוד את זה ישר אחרי פונקציות לינאריות.

4. $f(z)=\frac{1}{z}$ מסתבר שהיא יותר פשוטה.

הגדרה. מעגלל מוכלל ב- $\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{0\}$ הוא:

1. מעגל: $\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=r\}$ עבור $a\in\mathbb{C}$, $r>0$.
2. ישר: $l=\{z\in\mathbb{Z}:\alpha\operatorname{Re}z+\beta\operatorname{Im}z+\gamma=0\}\cup\{\infty\}$ כאשר $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

אם חושבים על $\bar{\mathbb{C}}$ באנצעות הטלה סטראוגרפית התמונה של ישר היא מעגל ה הספירה פרט לקוטב הצפוני. אמרנו שמתאימים את הקוטב לאינסוף אז טבעי להוסיף לישר את אינסוף.

טענה. דרך כל שלוש נקודות ב- $\mathbb{C}$ (שונות זו מזו) עובר מעגל מוכלל אחד.

טענה. ההעתקה $f(z)=\frac{1}{z}$ (עם $f(0)=\infty, f(\infty)=0$) מעבירה מעגל מוכלל למעגל מוכלל.

הוכחה. מעגל מוכלל $A\subseteq\bar{\mathbb{C}}$ אפשר להציג כך:

$$A\cap\mathbb{C}=\{z\in\mathbb{C}:\alpha|z|^2+\beta\operatorname{Re}z+\gamma\operatorname{Im}z+\delta=0\}$$

כאשר $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.
אם ניקח $\alpha=0$ נקבל את כל ישרים. אחרת, נניח בה"כ $\alpha=1$ (מהומוגניות)

$$|z|^2+\beta\operatorname{Re}z+\gamma\operatorname{Im}z+\delta=|z|^2+2\operatorname{Re}(z(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}i))+\delta=|z-(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}i)|^2+c(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

עתה,

$$\begin{aligned}f(A\cap\mathbb{C})=\{z\in\mathbb{C}:\alpha|\frac{1}{z}|^2+\beta\operatorname{Re}\frac{1}{z}+\gamma\operatorname{Im}\frac{1}{z}+\delta=0\}&=\\=\{z:\alpha+\beta\operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{|z|^2}+\gamma\operatorname{Im}\bar{z}+\delta|z|^2=0\}&=\\=\{z:\delta|z|^2+\beta\operatorname{Re}z-\gamma\operatorname{Im}z+\alpha=0\}&\end{aligned}$$

מעגל מוכלל אחר. צריך גם לוודא ש- $0,\infty$ לא בעייתים וזה נובע מרציפות $f:\bar{\mathbb{C}}\to\bar{\mathbb{C}}$. □

$\frac{1}{z}$ שומר על מעגלים מוכללים, גם $az+b$ שומר על מעגלים וישרים ולכן גם ההרכבות שלהם.

הגדרה. העתקות $Möbius$

תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה 2×2 של מספרים מרוכבים. מסמנים:

$$h_A = \frac{az+b}{cz+d}$$

כאשר $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

בנוסף נגדיר את $h_A(\infty), h_A(-\frac{d}{c})$ ע"י רציפות:

$$h_A(\infty) = \lim_{z\to\infty} h_A(z) = \frac{a}{c}(= \infty \text{ אם } c=0, a\neq 0)$$

$$h_A(-\frac{d}{c}) = \lim_{z\to -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty$$

כאשר $c \neq 0$. תרגיל: מדוע?

לסיכום עבור $A \in GL_2(\mathbb{C})$ הגדרנו את $h_A : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.

טענה. לכל $A \in GL_2(\mathbb{C})$ ההעתקה h_A מעבירה מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים.

הוכחה.

$$h_A(z) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$

$$z \mapsto cz+d \mapsto \frac{1}{cz+d} \mapsto \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c}) \cdot \frac{1}{cz+d}$$

כל ההעתקות שומרות על מעגלים מוכללים ולכן גם ההעתקה. □

למה בכלל רצינו לסדר את זה במטריצה?

טענה. $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ אזי $(h_A \circ h_B)(z) = h_{AB}(z)$.

הוכחה. נניח $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

$$h_A(h_B(z)) = h_A(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}) = \frac{a_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2z+b_2) + b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2) + d_1(c_2z+d_2)}$$

□

כלומר העתקות מביוס מהוות חבורה.

מסקנה.
1. $h_{A^{-1}}$ הופכית ל- h_A. בפרט, $h_A : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ היא חח"ע ועל.
2. $z = \frac{\lambda z + 0}{0 + \lambda} = h_{\lambda Id}$ זו העתקת הזהות. באופן כללי $\forall 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ $h_{\lambda A} = h_A$.
3. להעתקת מביוס יש לכל היותר שתי נקודות שבת ב- $\bar{\mathbb{C}}$, אלא אם $h_A(z) = z$.

הוכחה. אם $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אם $c=0$ אז h_A העתקה לינארית.

כלומר $h_A(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ אם $\frac{a}{d}=1$ אז $h_A(z)=z+\frac{b}{d}$ אז רק ∞ היא נקודת שבת.

אם $\frac{a}{d}\neq 0$ אז ∞ היא נקודת שבת ובנוסף $z=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}\Leftrightarrow z=\frac{-b}{a-d}$

בסה"כ 2 נקודות שבת.

אם $c\neq 0$ אז $z=\frac{az+b}{cz+d}$ (∞ לא נקודת שבת כי $f(\infty)=\frac{a}{c}\in\mathbb{C}$). אם $-\frac{d}{c}$ לא נקודת שבת לכן

$$\frac{az+b}{cz+d}=z\Leftrightarrow az+b=z(cz+d)$$

למשוואה ריבועית יש שני פתרונות לכל היותר. $\square$

מסקנה. אם להעתקת מביוס יש שלוש נקודות שבת היא בהכרח הזהות.

4. **טענה.** טרנזיטיביות בשלשות

נניח $z_1,z_2,z_3\in\bar{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו וכן $w_1,w_2,w_3\in\bar{\mathbb{C}}$ גם הן שלוש נקודות שונות זו מזו.

אזי קיימת ויחידה העתקת מביוס f כך ש- $f(z_j)=w_j$ $j=1,2,3$.

הוכחה. נוכיח יחידות. קיום נוכיח שיעור הבא.

נניח $(z_1,z_2,z_3)\xrightarrow{f}(w_1,w_2,w_3)$ וכן $(z_1,z_2,z_3)\xrightarrow{g}(w_1,w_2,w_3)$.

נביט בההעתקה $h=g^{-1}\circ f$ העתקת מביוס. כך ש- $h(z_j)=g^{-1}(f(z_j))=g^{-1}(w_j)=z_j$ לכן יש שלוש נקודות שבת ולכן h העתקת הזהות ואז בהכרח $f=g$. $\square$

דוגמא. נניח $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ ו- $w_1=0,w_2=1,w_3=\infty$. איך העתקה כזאת תעבוד?

$$f(z)=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$