פונקציות מרוכבות 1 - הרצאה 5

06.03.11

בשיעור הקודם אמרנו שהעתקה הולומורפית עם $f'(z) \neq 0, \forall z \in G$ היא שומרת זוויות (קונפורמית). הסיבה לכך היא שהעתקה $\mathbb{C}$ לא טריוויאלית היא קונפורמית (והעתקה הולומורפית היא בקירוב $\mathbb{C}$ לינארית).
זה לא נכון עבור $\mathbb{R}$ לינארית. לדוגמא $f(z) = \overline{z}$ או $(x+iy) \mapsto (2x+iy)$.
$\mathbb{C}$ לינארית : $f(z) = az$.
וראינו למה: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקה $\mathbb{R}$ לינארית אזי קיימים $a, b \in \mathbb{C}$ כך ש- $f(z) = az + b\overline{z}$.
כאשר $a = \frac{\partial f}{\partial z}(0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(0)$.
דרך טובה להבין את כל זה, היא לנסות לבד, אז שני תרגילים:

תרגיל. נניח $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ עם $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ דיפ' ב- $z_0 = x_0 + iy_0$. הראו:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + R(x,y) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{(z-z_0)} + R(z) \end{aligned}$$

כאשר $\lim_{z\to z_0} \frac{R(z)}{z-z_0} = 0$.

תרגיל. כלל השרשרת: לכל עקומה גזירה γ והעתקה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-דיפרנציאבילית,

$$(f \circ \gamma)' = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t_0))(\dot{\gamma})(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\gamma(t_0))(\dot{\gamma})(t_0)$$

נראה שאין עוד העתקות שומרות זוויות חוץ מהעתקות הולומורפיות. מדוע רוצים את זה? זה נותן דרך מאוד גיאומטרית להבין מיהן העתקות הולומורפיות.

למה. נניח $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שהיא העתקה $\mathbb{R}$-לינארית אזי f קונפורמית אס"ס קיים $0 \neq a \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$f(z) = az \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

הוכחה. $\Rightarrow$ ראינו כי $f'(z) = a \neq 0$. $\Leftarrow$ נתונה f העתקה $\mathbb{R}$-לינארית $f(z) = az + b\overline{z}$.
שלב 1: נראה כי $a \neq 0$. אחרת, $f(z) = b\overline{z}$, כלומר:

$$z \underbrace{\mapsto}_{\text{הופכת זוויות}} \overline{z} \underbrace{\mapsto}_{\text{שומרת זוויות}} b\overline{z}$$

בסה"כ ההעתקה הופכת זוויות ובסתירה.

שלב 2: ידוע כי $\mathbb{C} \ni a \neq 0$. ניקח שתי עקומות: γ_1 ציר ה־x ו־ γ_2 הישר שעובר דרך הנקודה λ על מעגל היחידה.
אז

$$\arg(\gamma_2) - \arg(\gamma_1) = \arg(\lambda) = \theta$$

אחרי ההעתקה f:

$$f(1) = a + b$$

$$f(\lambda) = a\lambda + b\overline{\lambda}$$

לכן,

$$\arg(\underbrace{a\lambda + b\overline{\lambda}}_{=\lambda(a+b\frac{\overline{\lambda}}{\lambda})}) - \arg(a+b) = \arg(\lambda)$$

$$\arg(\lambda) + \arg(a + b\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}) = \arg(\lambda) + \arg(a+b)$$

קיבלנו ש־ $a + b\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$ על הישר שעובר דרך $a+b$ ודרך הראשית.
לסיכום לכל $|\lambda| = 1$

$$a + b\frac{\overline{\lambda}}{\lambda} \in l = \{z \in \mathbb{C}; \arg(z) = \arg(a+b)\}$$

רוצים להראות ש־ $b = 0$.
אם $b \neq 0$ כש־ λ רץ על מעגל היחידה גם $\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$ רץ על מעגל היחידה ולכן $Image(a + b\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}) =$ מעגל לכן לא מוכל בקרן. מדוע $Image(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda})$ כאשר λ רץ על מעגל היחידה הוא שוב מעגל היחידה?

$$e^{i\theta} \mapsto \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

ההעתקה $a + bz$ תעביר מעגל שמרכזו ב־0 ורדיוסו 1 למעגל שמרכזו a ורדיוסו $|b|$. $\square$

משפט. נניח $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העקתה $\mathbb{R}$־דיפ' וקונפורמית. אזי f הולומורפית עם $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in G$.

הוכחה. תהי $z_0 \in G$. נניח ש־ γ_1, γ_2 עקומות רגולריות ו־ $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. מכלל השרשרת, $(f \circ \gamma_j)'(t_j) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\dot{\gamma_j}(t_j) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{\dot{\gamma_j}(t_j)}$ ל־ $j = 1, 2$.
אם נסמן $a = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$
מקונפורמיות:

$$(*) \arg(a\dot{\gamma_2} + b\overline{\dot{\gamma_1}}) - \arg(a\dot{\gamma_1} + b\overline{\dot{\gamma_1}}) = \arg(\dot{\gamma_2}) - \arg(\dot{\gamma_1})$$

זה נכון לכל שתי עקומות לכן $(*)$ מתקיים לכל שני וקטורים $\dot{\gamma_1}(t_1)$, $\dot{\gamma_2}(t_2)$

$$\lambda \mapsto a\lambda + b\overline{\lambda}$$

היא העתקה קונפורמית ומהלמה $b=0, a\neq 0$
כלומר f הולומורפית ו- $0\neq a=f'(z_0)$.
לכן $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. □

$$C-R \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}=0}$$

ואם משוואות קושי–רימן מתקיימות אז

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

מה עוד אפשר לסחוט ממשואות קושי רימן?

הגדרה. $u:G\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית אם הנגזרות מסדר 2 שלה קיימות ורציפות וכן:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Δu נקרא הלפלסיאן.

הגדרה. $u:G\to\mathbb{C}$ נקראת הרמונית אם $\mathrm{Re}(f)$ וגם $\mathrm{Im}(f)$ הן פונקציות הרמוניות. באופן שקול: אם $f=u+iv$ אז $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, כלומר f הרמונית אם $\Delta f=0$.

טענה. תהי f הולומורפית ב- G. נוכיח יום אחד של- f יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2. אזי f הרמונית, כלומר $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ הרמוניות.

הוכחה. דרך 1:
נסמן $f=u+iv$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

ולכן

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial y})=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial v}{\partial x})=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

ולכן $\Delta u=0$. כנ"ל לגבי v.
דרך 2:
ממשואות קושי רימן:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$$

נחשב:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}) = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}](\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})) = \frac{1}{4}\Delta f$$

נשים לב ש- $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta f$. $\square$