פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 3

27.02.11

תזכורת.

$$\lim_{z\to a} f(z) = L$$

אם ערכי f מתקרבים ל- L במישור.
ובאופן רגורוזי:

$$\lim_{z\to a} f(z) = L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \forall n, \quad a \neq z_n, \quad z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(z_n) \to L$$

באופן אינטואיטבי, נגדיר סביבה של ∞: $\{z : |z| > R\}$. במושג הזה, השאיפה לאינסוף – החל ממקום מסויים כל איברי הסדרה בסביבה של אינסוף.
דרך אפשרית נוספת לדמיין שאיפה לאינסוף היא ההטלה הסטרואגרפית. ניקח את המישור המרוכב ונמקם במרחב כך שזהו מישור שקורדינטת ה-z של כל נקודה עליו היא 0 ונבנה ספירה סביב הראשית S. נגדיר העתקה $f : \mathbb{C} \to S \setminus \{(0,0,1)\}$ – לכל נקודה על המישור נחבר אותה עם הקוטב הצפוני ונקודת החיתוך השנייה עם הספירה היא הנקודה שתתאים. ההעתקה היא חח"ע ועל. ואפילו הומומורפיזם.
יש גם נוסחא, שלא אומרת הרבה, אבל למען הסדר הטוב:

$$f(z) = \frac{(2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1}$$

אפילו על פונקציה על $\mathbb{C}$ אפשר לחשוב כפונקציה על $S \setminus \{(0,0,1)\}$. איך תראה לדוגמא $f = \frac{1}{z}$ על הספירה?
זה נשמע מעט תלוש. אבל, כאן מאוד טבעי להוסיף נקודה ל- $\mathbb{C}$ כדי שיהיה מה להתאים לקוטב הצפוני. מסמנים $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. וכעת:

$$z_n \to \infty \Leftrightarrow f(z_n) \to (0,0,1)$$

נגזרת מרוכבת

נכתוב סימנים שמאוד דומים למה שראינו בחדוא. עדיין צריך לזכור שמאחורי הסימונים מסתתר עולם גיאומטרי שונה בתכלית מהישר הממשי.

הגדרה. $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $z_0 \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ אומרים ש- f גזירה (דיפרנצאיבילית) ב- z_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\frac{df}{dz} = f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

מה זה אומר בפועל? שיש ב-z_0 קירוב לינארי מקומים. כלומר אפשר לרשום:

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{\text{הקירוב הלינארי}} + \underbrace{R(z)}_{\text{השגיאה}}$$

כאשר השגיאה קטנה:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$$

או

$$R(z) = o(z - z_0)$$

גם ההפך נכון, נניח שקיים $c \in \mathbb{C}$ עבורו

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + o(z - z_0)$$

אז בהכרח f גזריה ב- z_0 עם $f'(z_0) = c$. ההוכחה כמו בחדוא 1.
בדיוק כמו בחדוא 1. אבל הבדל מהותי הוא שלא באמת אפשר לצייר משיק - הרי כדי לצייר נצטרך 4 ממדים, הגרף הוא משטח דו ממדי ב-4 ממדים וזה לא מי יודע מה ניתן לציור. אז לא נצייר.

דוגמאות.

1. $f(z) = z$:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h) - z_0}{h} = 1$$

2. $f(z) = z^2$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hz_0 + h^2}{h} = 2z_0$$

למרות המשמעות הגיאומטרית השונה לגמרי עדיין יש דמיון בסימון המתמטי ובנוסחאות.
תכונות (אותן הוכחות בדיוק כמו בחדו"א 1):

1. נניח f, g גזירות ב- z_0 אז:

$$(f \pm g)' = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$g(z_0)\neq 0 \Rightarrow (\frac{f}{g})' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

2. אם f גזירה ב- z_0 אז היא רציפה ב- z_0.

הוכחה.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)-f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)=0$$

$\square$

3. כלל השרשרת: אם f גזירה ב- z_0, g גזירה ב- $w_0=f(z_0)$ אז

$$\frac{d}{dz}g(f(z))|_{z=z_0} = g'(w_0)f'(z_0)$$

כעת אנחנו יודעים לגזור המון פונקציות. למשל פולינומים. או פונקציות רציונליות: $\frac{P(z)}{Q(z)}$ עבור P,Q פולינומים. אולי אפילו שורש:

$$f(re^{i\theta})=\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

עבור $r>0, |\theta|<\frac{\pi}{2}$
תכונה בסיסית:

$$f(z^2)=f^2(z)=z, \operatorname{Re} z>0$$

נגזור. נניח לרגע שנתון לנו ש- f גזירה ב- $\operatorname{Re} z>0$ אז

$$(f(z))^2=z$$

$$2f(z)f'(z)=1$$

$$f'(z)=\frac{1}{2f(z)}$$

כדי שלא נרגיש בטוחים מדי נראה דוגמא של פונקציה שאינה גזירה:

דוגמא.
$f(z)=\overline{z}$ היא חלקה: $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה כזאת שבברור רציפה ונחמדה אינה גזירה באף נקודה.

$$f(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0}+\overline{h}-\overline{z_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

והגבול הזה לא קיים. ניקח $z_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{\overline{z_n}}{z_n} = 1 \to 1$$

ואם ניקח $z_n = \frac{i}{n}$

$$\frac{\overline{z_n}}{z_n} = -1 \to -1$$

כלומר, הגזירות המרוכבת, בניגוד למקרה הממשי היא לא בסה"כ מדד לחלוקה של הפונקציה.
אז אילו פונקציות חלקות הן בעלות נגזרת מרוכבת?

משוואות קושי-רימן

נניח f גזירה בנקודה מסויימת z_0. אילו תכונות, פרט לחלקות, יש לה?
נרשום $f = u + iv$ כאשר $v, u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. $f'(z_0) = a + ib$.
יודעים ש-

$$f(z) - f(z_0) = (a + ib)(z - z_0) + R(z)$$

כאשר $\frac{R(z)}{z-z_0} \xrightarrow{z \to z_0} 0$ או $\frac{|R(z)|}{|z-z_0|} \xrightarrow{z \to z_0} 0$.
נרשום: $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned}(u(x+iy) - u(x_0+iy_0)) + i(v(x+iy) - v(x_0+iy_0)) = \\ = (a(x-x_0) - b(y-y_0)) + i(a(y-y_0) + b(x-x_0) + R(x+iy)\end{aligned}$$

החלק הממשי של אגף ימין הוא קירוב לינארי לחלק הממשי של אגף שמאל והחלק המדומה של אגף ימין הוא הקירוב הלינארי לחלק המדומה של אגף שמאל.
נרשוםג (x, y) במקום $x + iy$. קיבלנו שהפונקציות $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מקיימות:

1.
$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + R_1(x, y)$$

2.
$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = b(x - x_0) + a(y - y_0) + R_2(x, y)$$

כאשר

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_1(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0^2}} = 0$$

כלומר u, v דיפרנציאבליות כפונקציות מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ ו-

$$\frac{du}{dx} = a = \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = -b = -\frac{dv}{dx}$$

ובפרט תנאי הכרחי לגזירות:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

אלה נקראות משוואות קושי רימן ונוכיח בשיעור הבא שזה גם תנאי מספיק.