פונקציות מרוכבות 1 - הרצאה 1

20.02.11

מספרים מרוכבים

שדה המספרים המרוכבים. $i^2=-1$.

$$\mathbb{C}=\{x+iy;x,y\in\mathbb{R}\}$$

למה בכלל היינו צריכים מרוכבים? מבחינה היסטורית פעם ראשונה חשבו על זה כשניסו למצוא נוסחה לפתרון משוואות ממעלה 3 ו־4. בנוסחאות היו קצת בעיות. גם כשכל הפתרונות היו ממשיים הנסוחאות כללו שורש של מספר שלילי. בסוף כמובן יוצא ממשי אבל חישובי ביניים הסתמכו על מספרים מרוכבים.
בסוף התברר שמרוכבים הם מכרה זהב. בפונקציות מרוכבות אפשר להניח מעט ולקבל המון. לדוגמא אם פונקציה גזירה אזי היא גזירה אינסוף פעמים, ואת זה נוכיח בהמשך. בקיצור - מגניב.

הגדרה. מספר מרוכב הוא זוג סדור של שני מספרים ממשיים. (x,y), כאשר $x,y\in\mathbb{R}$.
אוסף כל המספרים המרוכבים נסמן ב־ $\mathbb{C}$.

מה ההבדל מסתם מישור ממשי? יש פעולות שהופכות את $\mathbb{C}$ לשדה.

הגדרה. חיבור:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\equiv(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

הגדרה. כפל:

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\equiv(x_1x_2+y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

איבר האפס יהיה $(0,0)$.
היחידה היא $(1,0)$.
הופכי:

$$(x,y)^{-1}\equiv\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

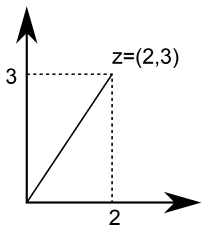
תרגיל חזרה של שנה א' הוא לבדוק שזה אכן שדה.
סימון נוסף:

הגדרה. עבור מספר מרוכב $z=(x,y)$ מסמנים:
החלק הממשי: $\operatorname{Re} z = x$
החלק המדומה: $\operatorname{Im} z = y$

הבעיה עם השדה הוא שהנוסחאות (בעיקר הכפל) די מסובכות. רוצים סימון שיהיה אינטואיטיבי יותר.
איך נזכור את הנוסחא של הכפל? נסמן $i=(0,1)$, $1=(1,0)$ (1 הוא היחידה של הכפל, $i^2=(-1,0)$). כעת כל מספר הוא צירוף לינארי של שני אלה.
כעת הכפל נראה:

$$\begin{aligned}(x_1 1 + y_1 i)\cdot(x_2 1 + y_2 i) = x_1x_2 1 + x_1y_2 i + y_1x_2 i + y_1y_2 i^2 =\\ = (x_1x_2 - y_1y_2)1 + (x_1y_2 + x_2y_1)i\end{aligned}$$

נייצג מספר כ- $x1+yi$ ובעצם נפסיק לכתוב את 1.
בכל זאת המרוכבים דומים למישור. $(2,3) \longleftrightarrow 2+3i \in \mathbb{C}$
אפשר לייצג גם באופן גרפי, וזה נקרא המישור של גאוס:

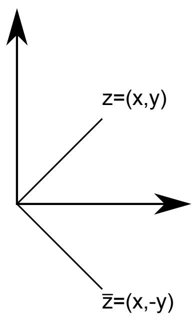


הגדרה. המרחק של $z=x+yi$ מהראשית:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2}$$

לעת לעת נרצה לדבר פחות על חלק ממשי וחלק מדומה אלה להתייחס למספר המרוכב כולו. דרך אחת היא הצמוד:

הגדרה. מסמנים עבור $z=x+yi$ את $\bar{z}=x-yi$



כלומר $\bar{z}$ הוא השיקוף של z לפי ציר x.
למה זה בכלל מועיל?
את המרחק מהראשית נוכל בקלות נכתוב:

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

למה החלטנו להפוך? למה דווקא את הקורדינטה השנייה? מסתבר שככה זה אוטומורפיזם של $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$. כלומר:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

נשים לב כי גם $\sqrt{-1} = -i$ וזה בעצם מה שהאוטומורפיזם עושה. מחליף בין שני השורשים של -1.
נראה ש- $|zw| = |z||w|$.
הסבר פשוט:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

כמו כן:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

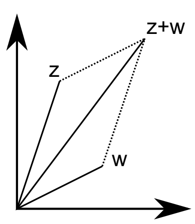
$$\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

ככה נוכל לזכור בקלות את הנוסחה של ההופכי:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

כמובן כאשר $z = x + yi$.
אי"ש המשולש

$$|z+w| \le |z| + |w|$$



נראה הוכחה אלגברית.

הוכחה. 1. $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$
הסבר:

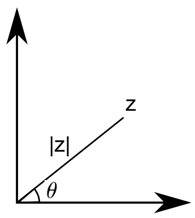
$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + w\bar{z} + z\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

.2

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| = (|z|+|w|)^2$$

□

הצגה פולרית (קוטבית)



אנחנו מאוד מתרגשים מהקשר של הכפל למישור של גאוס.
המרחק הוא $\sqrt{x^2+y^2} = |z|$. נרצה למצוא זווית θ)אולי אפילו יותר מאחת) כך ש-

$$x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta$$

מה כתוב כאן? $\cos\theta + i\sin\theta$ היא נקודה על ישר היחידה שיוצרת זווית θ עם ציר ה- x.
כלומר פירקנו את z לכמה צריך ללכת (המרחק) ובאיזה כיוון (הזווית).

הגדרה. נניח $z \neq 0$. נסמן $\operatorname{Arg}(z)$ את ה- $\theta \in (-\pi, \pi]$ היחידה כך ש-

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

עבור $r = |z|$.

דוגמא.

$$\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

באופן כללי,

$$\mathrm{Arg}(x+iy)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & x>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0, y>0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0, y<0\end{cases}$$

$$\mathrm{Arg}(x+iy)=\arctan\frac{y}{x}\mod\pi$$

זה די שרירותי כי לדוגמא היינו יכולים להגיד (שניהם מתאימים לאותה הזווית) $\mathrm{Arg}(-i)=\frac{3\pi}{2}$ או $\mathrm{Arg}(-i)=\frac{\pi}{2}$. באופן שרירותי פסלנו את המקרה הראשון. יתר על כן, יש קפיצה בערכים.
נסמן באופן אלגנטי יותר:

$$z\neq 0\quad \arg z=\{\mathrm{Arg}\, z+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$$

כלומר $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\Leftrightarrow\theta\in\arg z$.
תכונות:

1. $\arg(z)=2\pi+\arg(z)=\{2\pi+a : a\in\arg(z)\}$
2. $\arg(\bar{z})=-\arg z$
3. $\arg(\frac{1}{z})=\arg(\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\arg(\bar{z})$
4. $\arg(zw)=\arg(z)+\arg(w)$

נוודה:

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\ldots=$$
$$=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$