שבוע 1 (שיעור 1)

מושגי יסוד:

חוג (~~רגיל~~ עדכני: חוג חילופי עם יחידה): קבוצה R עם שתי פונקציות $+:R\times R\to R$, $\cdot:R\times R\to R$ שנקראות חיבור וכפל, ומקיימות:

- $(R,+)$ חבורה חיבורית אבלית
- כפל אסוציאטיבי (קיבוץ)
- דיסטריבוטיביות (פילוג) משני הצדדים

אנחנו תמיד נניח שתי תכונות $\forall a,b\in R\ \ a\cdot b=b\cdot a$

קיום איבר יחידה $1\in R\ \ \forall a\cdot 1=a$

סימון: נקצר ונרשום $ab:=a\cdot b$

טענה: איבר היחידה יחיד. הוכחה: $1=1\cdot 1'=1'$

דוגמאות:

1. $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ - אינו חילופי
2. $\mathbb{Z}$ הנו חוג
3. $2\mathbb{Z}=\{2x:x\in\mathbb{Z}\}$ - חוג ללא יחידה

הערה: מעכשיו - חוג = חוג חילופי עם יחידה

4. $\mathbb{C}[x]$ חוג חילופי עם יחידה

טענה: לכל $x\in R$ $0\cdot x=0$ כי: $0\cdot x=(0+0)x=0\cdot x+0\cdot x$

$\Downarrow$ נוסיף נגדי.

$0\cdot x=0$

את אוסף כל החוגים נסמן **Ring** וזו אינה קבוצה.

מורפיזם של חוגים. הומומורפיזם של חוגים - הומומורפיזם של חוגים עם יחידה (חוגים עם יחידה): פונקציה $f:R\to S$ כך ש:

1. $f(x+y)=f(x)+f(y)$ בפרט $f(0)=0$.
2. $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$.
3. $f(1_R)=1_S$

דוגמא: $R=\mathbb{C}$, $S=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ קואורדינטה-קואורדינטה.

$f:R\to S$ $f(x,y)=f(x,0)$ מקיימת את 1 ו-2 ולא 3.

~~עוד דוגמה:~~ $\cancel{f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}}$ $\cancel{x \mapsto 2x}$

סימון: $Hom_{\underline{Ring}}(R,S) = \{\underset{\text{הומו' של חוגים יחידתי}}{f: R \to S}\}$ [illegible] קבוצה

פשוט הומומו'

$id \in Hom(R,R)$

טענה: הרכבה של הומומו' היא הומומו'

הגדרות של חוג ושל הומומו' הופכים את $\underline{Ring}$ לקטגוריה.

*

שבוע 1 (שיעור 2)

<u>הגדרה</u> איזומורפיזם הוא הומומ' $f:R\to S$ אם יש לו
הופכי: g $\quad g\circ f=id_R \quad fg=id_S$
נסמן $g=f^{-1}$.

<u>טענה</u>: f^{-1} מוגדר ביחידות

<u>הוכחה</u>: נניח g,h הופכיים ל-f אז
$g=g\circ id_S=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=id_R\circ h=h$
(abstract non-sense)

<u>תרגיל</u>: הומומורפיזם $f\in Hom(R,S)$ הוא איזו' $\iff$
f הוא חחע"ל

<u>הגדרה</u>: אפימורפיזם f מ-R ל-S הומומ' על
מונומורפיזם: $\underbrace{\qquad\qquad}$ חח"ע

<u>תרגיל</u>: $f\in Hom(R,S)$ הוא אפי' אמ"מ קיים $g\in Hom(S,R)$
$f\circ g=id_S$
$f\in Hom(R,S)$ הוא מונו' $\iff$ $\exists g\in Hom(S,R),\ g\circ f=id_R$
לא נכון!!!

יש שני חוגים מיוחדים ביחס להומו' שלהם:
<u>חוג האפס</u>: נקח $R\in Ring$ כך ש- $0=1$
$\forall x\in R\quad 0=0\cdot x=1\cdot x=x \Rightarrow R=\{0\}$
נשים לב כי $\forall$ חוג S $\quad |Hom(S,R)|=1$
<u>בפרט</u>: אם R' גם מקיים $0_R=1_R$ יש איזו' יחיד
$\varphi:R\to R'$. (בשפת הקטגוריות $\{0\}$ נקרא אובייקט סופי).

<u>דוגמא</u>: החוג $\mathbb{Z}$ מקיים $|Hom(\mathbb{Z},R)|=1$
אם יש עוד חוג S שמקיים $|Hom(S,R)|=1$
אז יש איזו' יחיד $\varphi:\mathbb{Z}\to S$
$\{\varphi\}=Hom(\mathbb{Z},S)\quad \{\varphi^{-1}\}=Hom(S,\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}$ נקרא אוביקט התחלתי.

<u>תת חוג</u>: $S \subseteq R$ ו-R חוג, נאמר ש-S הוא תת חוג אם פונקציית השיכון היא הומומורפיזם.

<u>טענה</u>: $S \subseteq R$ הוא תת קבוצה של החוג R אז S תת חוג ביחס לפעולות המושרות אם ורק אם: (1) S סגור לחיבור ומכיל את 0. (2) S סגור לכפל (3) $1 \in S$

<u>הוכחה</u>: תרגיל. <u>הערה</u>: צריך את 3 התנאים.

<u>טענה</u>: אם $f: R \to S$ הומומ', אז $f(R)$ הוא תת חוג של S.

1.2 אידיאלים ומנות

בהינתן $f: R \to S$ נגדיר $\ker(f) := \{x \in R \mid f(x) = 0_S\}$

<u>תרגיל</u>: f מונומורפיזם $\iff \ker(f) = 0$.

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה $I \subseteq R$ נקראת אידיאל אם

1. I תת חבורה חיבורית
2. I סגור לכפל מהחוג, $\forall x \in I, y \in R \quad xy \in I$

נסמן $I \lhd R$ אם I אידיאל.

נאמר שאידיאל I הוא נאות אם $I \neq R$.

תמיד $R, \emptyset$ הם אידיאלים (טריויאליים)

בהינתן אידיאל I, נסתכל על R/I קבוצת הקוסטים.

$R/I = \{x + I : x \in R\}$

<u>משפט</u>: נראה שניתן להגדיר מבנה של חוג על R/I כך ש-$R \to R/I$ הוא הומומ' אם $I \lhd R$.

<u>משפט</u>: יהי $R \in Ring$, $I \in R$ תת', התנאים:

1. יש מבנה חוג על R/I כך שהעתקת המנה $R \to R/I$, $x \mapsto x + I$ היא הומומ'.
2. $I \lhd R$.

הוכחה

נסמן $\bar{x} = x+I \in R/I$ ונגדיר ש-* הוא כפל על R/I

כך ש- R/I הוא חוג. העתקת המנה היא הומומ' ⇐

$\overline{xy} = \bar{x}\cdot\bar{y}$ ואבר היחידה הוא $\bar{1}$.

התנאי הזה מגדיר את הכפל * לא ברור שזה מוגדר

היטב. * מוגדר היטב ⇔ $I \triangleleft R$

נקח $\begin{Bmatrix} \bar{w}=\bar{x} \\ \bar{z}=\bar{y} \end{Bmatrix}$ ונראה $\overline{zw}=\overline{xy}$ אם ורק אם $I \triangleleft R$

$$zw-xy\in I \iff zw-wy+wy-xy\in I$$

$$\Updownarrow$$

$$(**)\qquad w(z-y)+y(w-x)\in I$$

אם I אידיאל דו $(**)$ מתקיים מהגדרות האידיאל

אם הכפל מוגדר היטב, נקח $x\in I$ ו- $w=0$,

$y\in R$ כלשהו ו- $z=y$

$$0(z-y)+y(0-x)\in I \Rightarrow -xy\in I \Rightarrow xy\in I$$

דוגמה $\mathbb{Z} \triangleright n\mathbb{Z} = \{nx : x\in\mathbb{Z}\}$

לכן $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא חוג.

דוגמה אם $I\triangleleft R$ אז קיים S ו- $f\in Hom(R,S)$ כך ש-

$I=\ker(f)$ (אז $S=R/I$)

1.3 סכום אידיאלים

הגדרה יהיו $I,J\triangleleft R$, נגדיר $J+I=\{x+y : x\in I, y\in J\}$

באופן כללי, תהי $\mathcal{L}$ משפחת אידיאלים

נגדיר

$$\sum_{I\in\mathcal{L}} I = \left\{x_1+\dots+x_n \;\middle|\; \begin{matrix} n\geq 0 \\ I_1,\dots,I_n\in\mathcal{L} \\ x_i\in I_i \end{matrix}\right\}$$

טענה האידיאלים המינימלי $I\in\mathcal{L}$

$$\sum_{I\in\mathcal{L}} I \to \qquad \bigcup\mathcal{L} := \bigcup_{I\in\mathcal{L}} I$$

הוכחה $J=\sum_{I\in\mathcal{I}} I$. אם K אידיאל המכיל את $\cup\mathcal{I}$ אז K מכיל את $x_1+\dots+x_n$ לכל $x_1,\dots,x_n\in\cup\mathcal{I}$ ולכן $K\supseteq J$.
נשאר להראות ש-J אידיאל. סגור לחיבור מהגדרתו, ו-$0\in J$. נראה ש-J סגור לכפל מבחוץ: נקח $z\in R$ ואיבר כלשהו $x_1+\dots+x_n\in J$.

$$z(x_1+\dots+x_n)=zx_1+\dots+zx_n\in\mathcal{I}$$

וכו'. ∎

תרגיל יהי $\mathcal{I}$ משפחה מכוונת של אידיאלים, כלומר לכל $I_1,I_2\in\mathcal{I}$ ~~מתקיים $I_1\subseteq I_2$ או $I_2\subseteq I_1$~~ קיים $J\in\mathcal{I}$ כך ש-$I_1\cup I_2\subseteq J$. אז

$$\cup\mathcal{I}=\sum_{I\in\mathcal{I}} I$$

טענה יהיו $I,J\lhd R$ אז $I\cap J\lhd R$, ואפילו חיתוך כלשהו של אידיאלים הוא אידיאל.

הוכחה $x,y\in\bigcap_{I\in\mathcal{I}} I$ אז $x,y\in I$ לכל $I\in\mathcal{I}$ ולכן $x+y\in I$ $\Leftarrow$ $x+y\in\bigcap I$. באופן דומה כפל וגם 0 שייך לחיתוך. ∎

מסקנה $\sum_{I\in\mathcal{I}} I=\bigcap_{\cup\mathcal{I}\subseteq J} J$

תזכורת קס"ח ~~קבוצה~~ שבה לכל שני איברים יש סופרימום ואינפימום נקראת סריג.
ראינו שקבוצת האידיאלים היא סריג ביחס לסדר ההכלה, נסמן סריג זה ב- $I(R)$.

משפט ההתאמה
יהי $f:R\to S$ אפימורפיזם. 1. יש איזומורפיזם יחיד $\bar f:R/\ker f\to S$, כך ש-

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & R/\ker f \arrow[d, "\bar f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

(כלומר $\bar{f}(x+\ker f)=f(x)$ $\forall x\in R$)

2. f משרה איזו' בין הסריגים $\mathcal{L}(S)$ ו- $\{I\in\mathcal{L}(R) : \ker f\subseteq I\}$

הנתון ע"י דחיפה קדימה

$$\ker f\subseteq I\trianglelefteq R \longmapsto f(I)\trianglelefteq S$$

ומשיכה לאחור:

$$f^{-1}(J)=\{x\in R \mid f(x)\in J\} \longleftarrow\!\mapsto J\trianglelefteq S$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הערה* אם יש תרשים של חצים נאמר שהוא חילופי אם $h=g\circ f$. התרשים יכול להיות גם מורכב ובצורות אחרות.

* איזומורפיזם של סריגים: הומו' של סריגים שהוא הפיך.

שיעור 3   25.10

חוג: חוג חילופי עם יחידה

אידיאלים - אוסף האידיאלים $\mathcal{L}(R)$

משפט ההתאמה: יהי $f: R \to S$ על.

1. יש איזומורפיזם יחיד $\bar{f}: R/\ker f \to S$ כך שהדיאגרמה הבאה חלופית

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\text{ההטלה הטבעית}"] \arrow[d, "f"'] & R/\ker f \arrow[dl, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

2. f משרה איזומורפיזם של סריגים בין $\mathcal{L}(S)$ לבין $\{ I \in \mathcal{L}(R) \mid \ker f \subseteq I \}$

הוכחה: אם יש הומומו' כזה הוא חייב לקיים $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ כאשר $\bar{x} = x + \ker f$ ולכן הוא יחיד אם הוא קיים.

נבדוק שזה אכן איזו': $\bar{f}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{f}(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y)$

מוגדר היטב: $x - y \in \ker f \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\bar{f}$ הוא על כי תמונתו שווה לזו של f.

אם $\bar{f}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f \Rightarrow \bar{x} = 0$

לכן $\bar{f}$ חח"ע

$\Downarrow$

$\bar{f}$ איזומורפיזם

(וגם $\bar{f}(\bar{1}) = f(1) = 1$)

2. כיוון ש- $\bar{f}$ הוא איזומורפיזם, הוא משרה איזו' של סריגים $\mathcal{L}(S) \cong \mathcal{L}(R/\ker f)$

לכן, בה"כ, נניח ש $S=R/\ker f$ ו- f = העתקת המנה.

נסמן $K=\ker f$. לכל אידיאל I.

$f(I)=\{x+K : x\in I\}=(I+K)/K$

בפרט אם $K\subseteq I$ אז $f(I)=I/K$

שלב ראשון: $\boxed{f^{-1}(I/K)=I}$ ← הכיוון $\supseteq$ טריוויאלי.

נראה את $\subseteq$: יהי $x\in f^{-1}(I/K)$ אז $\bar{x}\in I/K=\{y+K : y\in I\}$

קיים $y\in I$ כך ש $\bar{x}=\bar{y}$ ⇐ $x-y\in K\subseteq I$

⇐ $x\in y+I=I$ כנדרש. $y\in I$

שלב שני נקח אידיאל $J\subseteq R/K$ נסמן $I=f^{-1}(J)=$
$=\{x\in R : \bar{x}\in J\}$

$\bar{x}\in I/K \Leftrightarrow x\in I \Leftrightarrow \bar{x}\in J$ כנדרש.

הראינו שהתאמה היא חח"ע. ברור שהיא שומרת סדר.

הערה: ראינו שהאידיאלים של R/K הם מהצורה I/K עם $K\subseteq I\trianglelefteq R$

1.4 יחידות, מחלקי אפס, נילפוטנטים

הגדרה: נאמר $a|b$ (a מחלק את b) אם קיים c כך ש $b=ac$. הכפולות של a הם האידיאל $\langle a\rangle=aR$

מסקנה: $a|b \Leftrightarrow \langle b\rangle\subseteq\langle a\rangle$

האידיאל $\langle a\rangle$ נקרא אידיאל ראשי ונאמר שהוא נוצר ע"י a.

באופן כללי יותר: אם $X\subseteq R$ נסמן ב- $\langle X\rangle=\sum_{x\in X}Rx$ האידיאל שנוצר ע"י X.

בפרט, אם $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ גם נסמן את האידיאל $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$

⊛ אידיאל שנוצר ע"י מס' סופי של איברים נקרא אידיאל נ"ס.

<u>הגדרה</u>: חוג נקרא חוג נתרי אם כל אידיאל נ"ס.

נאמר ש- $x\in R$ הוא <u>מחלק אפס</u> אם קיים $0\neq y$ כך ש- $x\cdot y=0$.

<u>דוגמא</u>: $2\neq 0$ הוא מחלק אפס מודולו 6 כי $2\cdot 3=0 \pmod 6$

<u>הגדרה</u>:
חוג ללא מחלקי אפס שונים מאפס נקרא תחום שלמות (בקיצור: תחום)

<u>תרגיל</u>: בתחומי שלמות יש את חוק הצמצום:
$\forall a,b\in R,\ a\neq 0$: $ab=ac \Rightarrow b=c$

<u>פתרון</u>: $a(b-c)=0$ כיוון ש- a אינו מחלק [illegible]
$b-c=0 \Rightarrow b=c$

<u>הגדרה</u>: $x\in R$ נקרא נילפוטנט אם קיים $n\geq 1$ כך ש- $x^n=0$.

⊛ ברור שנילפוטנט הוא מחלק 0 בחוג $R\neq 0$.

חוג ללא נילפוטנטים שונים מאפס נקרא חוג מצומצם.

<u>תרגיל</u>: נסמן $nil(R)=\{x\in R: x \text{ נילפוטנט}\}$. אז: $nil(R)$ הוא אידיאל.

<u>פתרון</u>: $x,y\in nil(R) \Rightarrow$ קיימים $n,m\geq 1$ כך ש- $x^n=0$; $y^m=0$ אז

$$(x+y)^{n+m}=\sum_{i=0}^{n+m}\binom{n+m}{i}x^iy^{n+m-i}$$

״טוני אוהב את הדיבורים האלה אבל

לכל $m+n \geq i \geq 0$: $n \geq i$ או $n+m-i \geq m$ $\Leftarrow$ $x^i y^{n+m-i} = 0$
$\Leftarrow$ $(x+y)^{n+m} = 0$ סגירות לכפל טריוויאלית

<u>הגדרה חוזרת ומתוקנת</u>

חוג $0 \neq$ נקרא תחום שלמות אם אין מחלקי אפס
שונים מאפס.

תרגיל: $R \neq 0$: $R/nil(R)$ הוא חוג מצומצם
<u>פתרון:</u> $\bar{x} \in R/nilR$ נילפוטנטי. אז יש $n \geq 1$ כך
ש- $\bar{x}^n = 0$ $\Leftarrow$ $x^n \in nil(R)$ לכן קיים $m \geq 1$ כך
ש- $x^{nm} = (x^n)^m = 0$ $\Leftarrow$ $x \in nil(R)$ $\Leftarrow$ $\bar{x} = 0$ ∎

<u>הגדרה</u> איבר $x \in R$ נקרא הפיך (או יחידה) אם קיים
$y \in R$ כך ש- $xy = 1$. נשים לב ש- x הפיך
$\Leftarrow$ $\langle x \rangle = R$
$R^{\times} := \{x \mid \text{הפיך } x\}$ נקראת
החבורה הכפלית של R וזו חבורה ביחס לכפל.
<u>הגדרה:</u> חוג R נקרא שדה אם $R^{\times} = R \setminus \{0\}$
<u>טענה:</u> יהי $R \neq 0$ חוג. התנאים הבאים שקולים:
1. R שדה
2. $\mathcal{I}(R) = \{0, R\}$
3. לכל חוג $S \neq 0$ ולכל $f \in Hom(R,S)$ f הוא חח"ע.

<u>הוכחה:</u> $(1 \Leftarrow 2)$ אם $I \neq 0$ אידיאל אז ניקח $0 \neq x \in I$
$\Leftarrow$ $x \in R^{\times}$ $\Leftarrow$ $R = \langle x \rangle \subseteq I$ $\Leftarrow$ $I = R$.

$(2 \Leftarrow 3)$ ניקח $f: R \to S$ $1 \notin \ker f$ $\Leftarrow$ $\ker f = 0$ $\Leftarrow$ f חח"ע.
$(3 \Leftarrow 1)$ נניח בשלילה ש- R אינו שדה ולכן יש
$0 \neq x \in R$ לא הפיך.

הערה: $R \to R/\langle x \rangle$ הומומורפיזם הטבעי כי $\bar{x} = 0$.
וגם $R/\langle x \rangle \neq 0$ כי $R \neq \langle x \rangle$ סתירה ל-3

1.5 אידיאלים ראשוניים ואידיאלים מקסימליים

הגדרה: אידיאל P בחוג R נקרא ראשוני אם $P \neq R$ ומקיים: לכל $x \cdot y \in P \Rightarrow x \in P$ או $y \in P$.
$(x, y \in R)$

דוגמא: אם $p \in \mathbb{Z}$ מס' ראשוני אז $p\mathbb{Z}$ הוא אידיאל ראשוני.

נסמן את קבוצת האידיאלים הראשוניים ב-:
$$Spec(R) = \{P \triangleleft R : \text{ראשוני } P\}$$

הגדרה: אידיאל $M \triangleleft R$ נקרא מקסימלי אם $M \neq R$ ולכל אידיאל $M \leq I \leq R$ מתקיים או $I = M$ או $I = R$

דוגמא: $p\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{Z}$.

תרגיל: תבינו: זהו את $Spec\,\mathbb{C}[x]$.

טענה: $R \neq 0$ יהי $I \in \mathcal{I}(R)$.
1. I ראשוני $\Leftrightarrow$ R/I תחום שלמות.
2. I מקסימלי $\Leftrightarrow$ R/I שדה.

הוכחה: 1. יהיו $x, y \in R$ כך ש- $xy = 0$ $(mod\, I)$
$\Leftarrow$ $xy \in I$ $\Leftarrow$ $x \in I$ או $y \in I$ $x \equiv 0 \, (mod\, I)$ או $y = 0 \, (I)$
לכן R/I תחום שלמות.
ממשפט ההתאמה $\mathcal{L}(R/I) = \{J \triangleleft R : I \subseteq J\}$
לכן $\mathcal{L}(R/I) = \{0, R/I\}$
$\Updownarrow$
I מקסימלי $\Leftrightarrow$ $\{J \triangleleft R : I \subseteq J\} = \{I, R\}$

Scanned with CamScanner

מסקנה: כל אידיאל מקסימלי הוא ראשוני * (ההפך איננו נכון)
הוכחה: שדה הוא תחום שלמות.

מסקנה: בחוג $R\neq 0$, R תחום שלמות $\iff$ 0 ראשוני.
הוכחה: נקח $I=0$ בטענה הקודמת

* למשל אידיאל האפס $0\subseteq 2\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$ ראשוני לא מקסימלי.

משפט: בכל חוג $R\neq 0$ יש אידיאל מקסימלי. ובפרט $\operatorname{spec}R\neq 0$

הוכחה: נשתמש באקסיומת הבחירה. נוכיח משהו יותר חזק:
טענה: יהי $I\subsetneq R$ אידיאל נאות, אז יש מקסימלי $I\subseteq M$:
הוכחה: נסמן ב- $\mathcal{F}$ את משפחת כל האידיאלים הנאותים המכילים את I, $\mathcal{F}\neq\emptyset \Leftarrow I\in\mathcal{F}$ סדורה ע"י הכלה.
אם $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\mathcal{F}$ שרשרת, נקח $J=\bigcup J_\alpha$ $J\neq R$
כי $1\notin J$, J אידיאל וחסם מלעל.
מהלמה של צורן: יש איבר מקסימלי $M\in\mathcal{F}$ ובפרט $I\subseteq M\neq R$
אם $I\subseteq M\subseteq N\subsetneq R$ $\Leftarrow$ $N=M$ ∎

מסקנה: יהי $R\neq 0$ כל איבר לא הפיך $x\in R$ מוכל באידיאל מקסימלי.

משפט: יהי $R\neq 0$ חוג, התנאים הבאים שקולים:
1. R נתרי
2. כל סדרה עולה של אידיאלים מתייצבת
3. בכל אוסף לא ריק של אידיאלים יש מקסימלי.

הוכחה: $1\Rightarrow 2$ נסתכל על $I=\bigcup_{j=0}^{\infty} I_j$ זה אידיאל
$\Leftarrow$ I נ"ס נקח $x_1,\dots,x_n\in I$ שיוצרים את

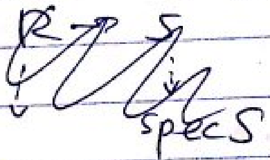
לכל $1\le r\le n$ יש j_r כך ש $x_r \in I_{j_r}$
נקח $j = \max\{j_1,\dots,j_r\}$ $\Leftarrow$ $x_1,\dots,x_r \in I_j$
לכן $I \subseteq I_j \subseteq \dots \subseteq I$ $\Leftarrow$ כולם שווים.

2 ⇐ 3: $F = \{I\}$ אוסף של אידיאלים שאין בו איבר מקסימלי. נקח $I_1 \in F$, I_1 לא מקסימלי ולכן יש $I \subsetneq I_2 \in F$. נבנה סדרה בעזרת אינדוקציה של הכלות ממש $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ סתירה ל-2.

3 ⇐ 1: $I \subseteq R$
$F = \{J \subseteq I : \text{נוצר סופית } J\}$
נקח $J = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$ מקסימלי ב-F.
אם $J = I$ סיימנו.
אחרת יש $x \in I \setminus J$ ואז $J \subsetneq \langle J, x\rangle \subseteq I$
$\Leftarrow$ סתירה למקסימליות של J.

טענה: ההתאמה לכל קבוצה R את $\operatorname{spec}R$ הוא פונקטור: אם $f: R \to S$ הומומורפיזם אז $f^*: \operatorname{spec}S \to \operatorname{spec}R$ המוגדרת ע"י $f^*(P) = f^{-1}(P)$ היא פונקציה.

הוכחה:



נקח $xy \in f^{-1}(P)$
$\Leftarrow$ $f(x)\cdot f(y) = f(xy) \in P$
$\Leftarrow$ $f(x) \in P$ או $f(y) \in P$
$\Leftarrow$ $x \in f^{-1}(P)$ או $y \in f^{-1}(P)$

בנוסף:

תרגול 1

הגדרות: יהי $f:A\to B$ הומומ' של חוגים

(1) f נקרא מונו' אם $\forall g,h:B\to C$

$$f\circ h=f\circ g \Rightarrow h=g$$

אפי' " "

$$\forall g,h:C\to A\ ,\ h\circ f=g\circ f \Rightarrow h=g$$

(2) f נקרא חח"ע/על אם הוא חח"ע/על.

(3) f מונו' מפוצל אם יש $g:B\to A$ כך ש $g\circ f=id_A$

אפי' מפוצל $g:B\to A$ כך ש $f\circ g=id_B$

מונו' מפוצל $\Leftarrow$ חח"ע $\Leftarrow$ מונו'

אפי' מפוצל $\Leftarrow$ על $\Leftarrow$ אפי'

• מונו' $\Leftarrow$ חח"ע: נניח ש f מונו', נניח ש $f(x)=f(y)$ וגם $x\neq y$, נגדיר $h,g:\mathbb{Z}[x]\to A$

$x\xrightarrow{h}x$

$x\xrightarrow{g}y$

אז $h\neq g$, אבל $f\circ h=f\circ g$

חח"ע $\not\Rightarrow$ מונו' מפוצל: $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$

אפי' $\not\Rightarrow$ על

על $\not\Rightarrow$ אפי' מפוצל: $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n$

$\mathbb{Z}/p^2\to\mathbb{Z}/p$

תזכורת: יהי R חוג. נסמן $nil(R)=Nil(R)=\sqrt{0}=$

$$=\{x\in R \mid \exists m\geq 1: x^m=0\}=\bigcap_{P\in Spec R} P$$

תרגיל: 1) יהי $x\in nil(R)$, הראו ש $1-x\in R^\times$

2) נניח $x\in Nil(R)$, $a\in R^\times$, הראו $a+x\in R^\times$

פתרון: נניח ש- $x^n=0$ אז $(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1})=1$

$(1-x)(1+x+x^2+\dots)$

תרגיל: יהי R חוג. יהי $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in R[x]$

צ"ל:
(1) f הפיך $\iff$ $a_0 \in R^\times$ וגם a_i, $i>0$, $a_i \in Nil(R)$

(2) $f \in Nil(R[x]) \iff \forall i, a_i \in Nil(R)$

(3) f מחלק 0 $\iff \exists b \in R,\ b \cdot f = 0$

(4) אם $f, g \in R[x]$ אז $f \cdot g$ פרימיטיבי $\iff$ גם f וגם g פרימיטיביים.

תזכורת: f פרימיטיבי אם $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \langle 1 \rangle$

פתרון: (1) $\Rightarrow$ כמו של כל ... נגדיר הפיך ... :

$\Leftarrow$ $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ אז $a_0 b_0 = 1$, $a_n b_m = 0$

טענה: $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ $\forall 0 \le r \le m$

באינדוקציה - בסיס 0 ✓

נניח נכונות לכל $0 \le s \le r$.

$$f \cdot g = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m+n} x^{n+m}$$

$$0 = c_{m+n-r} = \sum_{j=0}^{r} a_{n-j} b_{m-r+j} \cdot a_n^{r}$$

$$0 = a_n^{r+1} \cdot b_m + \sum_{j=1}^{r} a_{n-j} \underbrace{(a_n^{r-j+1} b_{m-r+j})}_{0} \cdot a_n^{j-1}$$

∎

אם נציב $r=m$ נקבל

$$a_n^{m+1} \cdot \underset{\text{הפיך}}{b_0} = 0$$

מכאן, $a \in Nil(R)$, לכן $a_n x^n \in Nil(R[x])$,

$$f - a_n x^n \in (R[x])^\times$$

נמשיך באינדוקציה על $\deg f$.

2. $\Rightarrow$ כמו של נגדיר :

$\Leftarrow$ נראה למה: לכל $P \in Spec R$, $P[x] \in Spec R[x]$

הוכחה: נגדיר הומומ' $\varphi: R[x] \to (R/P)[x]$

נשים לב כי $\ker \varphi = P[x]$

R/P תחום שלמות (כי P ראשוני) $\Leftarrow$ $(R/P)[x]$ ת"ש

$\Leftarrow$ $P[x]$ ראשוני.

מסקנה מהנ"ל:

$$Nil(R[x]) = \bigcap_{q \in Spec R[x]} q \subseteq \bigcap_{P \in Spec R} (p[x]) = \Big(\bigcap_{P \in Spec} p\Big)[x] =$$
$$= Nil(R)[x]$$

(3) יהי f מחלק אפס $\{g \in R[x] \mid g \cdot f = 0\}$

נקח $g \neq 0$ כזה מדרגה מינימלית.

$b_0 + \dots + b_m x^m$, נראה כי $b_m f = 0$.

מתקיים, $a_n \cdot b_m = 0$ $\Leftarrow$ $\deg(g) > \deg(a_n g)$

אך $(a_n g) f = 0$ $\Leftarrow$ $a_n g = 0$.

נראה כי: $\forall 0 \leq r \leq n \quad a_{n-r} g = 0$

(זה מספיק להוכחה כי זה גורר

$\forall i,j \quad a_i b_j = 0$

ובפרט $\forall i \; b_m a_i = 0$

נוכיח באינדוקציה: $r = 0$ ✓

נניח נכונות לכל $0 \leq s \leq r-1$:

$$0 = C_{m+n-r} = \sum_{j=0}^{r} a_{n-j} b_{m+j-r} = a_{n-r} \cdot b_m$$

$\Rightarrow$ $a_{n-r} g f = 0$ ו- $\deg(a_{n-r} g) < \deg(g)$

כיוון ש- g מדרגה מינימלית נקבל $a_{n-r} g = 0$.

(4) f פרימיטיבי $\Longleftrightarrow$ אין אידיאל מקסימלי שמכיל את כל המקדמים.

יהי $M \triangleleft R$ מקסימלי. כיוון ש R/M שדה, $(R/M)[x]$ הוא תחום שלמות.

$$\bar{f} \cdot \bar{g} \neq 0 \in (R/M)[x] \Leftarrow \bar{f}, \bar{g} \neq 0 \in (R/M)[x] \Longleftrightarrow f, g \notin m[x]$$
$$\Updownarrow$$
$$f \cdot g \notin m[x]$$

לכן f, g מקדמים שאין אידיאל מקסימלי שמכיל את $\Longleftrightarrow$ $f \cdot g$ מקדם.