שיעור 4 - שבוע 3 - 28.10.18

טענה: $nil(R) = \bigcap_{P\in SpecR} P$

הוכחה: $x\in nil(R)$ כלומר $\exists n \; x^n=0 \Leftarrow \forall P\in SpecR \; x^n\in P$

$\Downarrow$

מראשוניות של P נקבל $x\in P$ (אם x^n ב-P וראשוני) $\Rightarrow nil(R)\subset \bigcap_{P\in SpecR} P$

כיוון שני:

נקח x שאינו נילפוטנטי, נסתכל על משפחת האידיאלים $\mathcal{F}=\{I\}$ כך ש-$x^n\notin I$ לכל n. נקח $P\in\mathcal{F}$ (*) מקסימלי במשפחה (צורן) 3. להראות P ראשוני: יהי $a,b\notin P$, $ab\in P$. האידיאלים $P+aR$, $P+bR$ מכילים ממש את P

לכן $x\in P+aR$

$\exists n \; x^n\in P+aR$, $\exists m \; x^m\in P+bR$, $x^{n+m}\in P+abR$

$\Downarrow$

$ab\notin P \Leftarrow P\neq P+abR \Leftarrow P+abR\notin\mathcal{F}$ בסתירה

הגדרה: הרדיקל של ג'קובסון מוגדר ע"י $J(R)=\bigcap M$, M אידיאל מקסימלי

בפרט $J(R)\supseteq nil(R)$

טענה: יהי $R\neq 0$ חוג, $x\in R$.

$x\in J(R) \iff 1-xy\in R^\times$ לכל $y\in R$

(תזכורת: אם x נילפוטנטי, $1-x$ הפיך. אין צורך בפורמלי "$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$". אם x נילפוטנטי, כלומר $x^{n+1}=0$ אז "$\frac{1}{1-x}=1+x+\dots+x^n$" ולכן קודם $(1-x)(1+x+\dots+x^n)=1-x^{n+1}=1$)

(*) האוסף אינו ריק כי x אינו נילפוטנטי.

הוכחת הטענה: (⇐) $x \in J(R)$ ונניח בשלילה שקיים $y \in R$ כך ש- $1-xy$ לא הפיך. ⇐ קיים אידאל מקסימלי M כך ש- $1-xy \in M$ אבל גם $x \in M$ ולכן גם $xy \in M$ אבל $1=(1-xy)+xy \in M$ סתירה לכך ש- M נאות.

(⇒) נניח ש- $1-xy$ הפיך לכל $y \in R$. נניח בשלילה ש- $x \notin J(R)$.

⇐ קיים M מקסימלי כך ש- $x \notin M$ ⇐ $M \subsetneq M+xR$ ממקסימליות של M $M+xR=R$. בפרט $1=m+xy$ עבור $y \in R$, $m \in M$.

$$\underbrace{1-xy}_{\text{הפיך}}=m \in M \Rightarrow M=R$$ סתירה לנאותות של M.

<u>הגדרה</u> חוג R נקרא חוג מקומי אם יש לו אידאל מקסימלי יחיד M, נסמן ב- (R,M).

<u>דוגמאות</u>. $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x]_{\langle x \rangle} = \{ \frac{f}{g} : g(0) \neq 0 \}$ פולינומים
זה חוג מקומי, והאידאל המקסימלי היחיד שלו הוא $x\,\mathbb{C}[x]_{\langle x \rangle}$

<u>דוגמא אנליטית</u>: $R = Hol(\mathbb{C})$ $R_{x=0} = \{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ מתכנסים $\}$

$$= \{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \text{ מתכנסים ב-} \mathbb{C} \}$$

$\mathbb{C} \subsetneq R_{x=0} = \{$ טורי טיילור שמתכנסים בסביבת 0 $\}$

<u>דוגמאות דיפרנציאליות</u>

<u>טענה</u>: 1) יהי $R \neq 0$ חוג ו- M אידאל נאות כך ש- $R - M \subseteq R^*$ אזי (R,M) הוא חוג מקומי.

2) יהי $R \neq 0$ חוג ו- M מקסימלי, ונניח ש- $1+M \subseteq R^*$ כלומר $1+x \in R^*$ לכל $x \in M$.
אזי (R,M) מקומי.

הוכחה: 1) אם I אידיאל נאות, אז כל $x \in I$ לא הפיך, ואז $x \in M$ ולכן M מקסימלי יחיד.

2) נניח $x \in M$ אז לכל $x \in R$ גם $xy \in M$ $\Leftarrow$ $1+xy$ הפיך לפי ההנחה. $\Leftarrow x \in J(R)$ לכן $M \subseteq J(R)$

ואז $J(R) \subseteq M$ $\Leftarrow$ $J(R) = \bigcap N$

N מקסימלי

$\Leftarrow$ $N \subseteq M$ לכל N מקסימלי $\Leftarrow$ $N = M$ לכל מקסימלי. ■

הערה: פעולה נוספת על אידיאלים: יהיו לנו

$I+J$ האידיאל הכי קטן שמכיל את שניהם.

$I \cap J$ האידיאל הכי גדול שמוכל בתוכם.

$$I * J = \langle xy : x \in I, y \in J \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i : \begin{matrix} x_i \in I \\ y_i \in J \\ n \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

באופן דומה: נגדיר מכפלה ~~לכל~~ סופית של אידיאלים.

$$I_1 \cdots I_m = \langle x_1 \cdots x_m \mid x_i \in I_i \rangle = \left\{ \sum_{j \in A} x_{1_j} \cdots x_{m_j} : x_{i_j} \in I_i \right\}$$

$$I \cdot J \subseteq I \cap J \subseteq I, J \subseteq I + J$$

$R = \mathbb{Z}$, $I = \langle a \rangle$, $J = \langle b \rangle$, $I \cdot J = \langle ab \rangle$

$I + J = \langle \gcd(a,b) \rangle$, $I \cap J = \langle \mathrm{lcm}(a,b) \rangle$

$2\mathbb{Z} \cdot 2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$