הרצאה 13

משפט: אם R הוא חוג ראשי $T\neq 0$ מודול-R נ"ס שהוא פיתול R; אז יש פירוק יחיד

$$T \cong R/p^{e_1}R \oplus \cdots \oplus R/p^{e_m}R \quad (*)$$

עם $0<e_1\le e_2\le\cdots\le e_m$ כאן m - מס' היוצרים המינימלי של T.

הוכחה: קיום הוכחנו.

יחידות: אם יש משהו פירוק. מהצורה $(*)$

נסתכל על $\underbrace{T/pT}_{\text{לא תלוי בפירוק}} = (R/p)^m$

$$pT \cong pR/p^{e_1}R \oplus \cdots \oplus pR/p^{e_m}R$$

$$\Leftarrow \quad T/pT \cong R/p^{e_1}R \big/ pR/p^{e_1}R \oplus \cdots$$

וזה R/p

T/pT מ"ו מעל השדה R/p ולכן יש לו מימד

$$\dim_{R/p} T/pT = m$$

נסתכל על $\dim pT/p^2T$

$$pT/p^2T = \#\{e_i>1\}$$

$$\dim_{R/p} p^kT/p^{k+1}T = \#\{e_i>k\}$$ ■

המשפט נותן צורה נורמלית למודולי פיתול-p, וביחד עם הפירוק $T=\bigoplus T_p$ זה נותן צורה נורמלית למודולי פיתול. ביחד עם הפירוק $M=T\oplus F$ נותן צורה נורמלית למודולים נ"ס. לגורמים $R/p^{e}R$ ביחד עם הריבוי שלהם שמופיעים קוראים הגורמים האלמנטריים של M ול-$\operatorname{rank}F$ קוראים הדרגה של M ומסמנים $\operatorname{rank}M$.

משפט: יהי T מודול פיתול נ"ס מעל R שהוא PID. אז יש פירוק יחיד

$$\star \quad T \cong R/d_1R \oplus \cdots \oplus R/d_mR$$

באשר $1\neq d_1 | d_2 | \cdots | d_m$

<u>הוכחה:</u> קל לעבור מהפירוק לגורמים אלמנטריים לפירוק * ולהפך.
אם יש * נפרק $d_i=\prod p_{ij}^{e_i}$ ואז $R/d_i \cong \bigoplus R/p_{ij}^{e_{ij}}$

<u>ולהפך:</u> $T=\bigoplus T_p$. לכל p יש $1\le e_{1,p}\le\dots\le e_{m_p,p}$
נגדיר: $m=\max\{m_p\}$, $d_m=\prod p^{e_{m_p,p}}$

$d_{m-1}=\prod p^{e_{m_p-1,p}}$ ~~$d_{m-1}=\prod$~~

ועבור $i\le 0$ נסכים ש $p^{e_{i,p}}=1$ בסימון הזה.

<u>הערה:</u> אם G חבורה אבלית נ"ס אז נחשוב עליה כמודול מעל $\mathbb{Z}$ ומייד נקבל את הצורות הנורמליות של חבורות אבליות.

<u>הערה שניה:</u> A העתקה ליניארית על מ"ו V מעל $\mathbb{C}$. ונניח ש $\dim V=n<\infty$ אז זה משרה מבנה של מודול מעל $\mathbb{C}[x]$ על V: $f\cdot v:=f(A)v$

$$\Rightarrow V\cong \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}[x]/\langle \underbrace{(x-\alpha_j)}_{p\text{ - גורמים אי פריקים}}^{e_{ij}}\rangle$$

ניקח את $\mathbb{C}[x]/\langle (x-\alpha_j)^{e_{ij}}\rangle$ ניקח את הבסיס בכל גורם הבסיס $1,x,\dots,x^{e_{ij}-1}$

הפעולה של A על V מיוצגת ע"י הכפלה ב-x, נקבל שבבסיס זה המטריצה המייצגת היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -\alpha_j \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & -e_{ij}\alpha_j \end{pmatrix}$$

$(x-\alpha_j)^{e_{ij}}=x^{e_{ij}}+\sum_{k=0}^{e_{ij}}\binom{e_{ij}}{k}$???

ניקח את הבסיס $1,(x-\alpha_j),\dots,(x-\alpha_j)^{e_{ij}-1}$

$1\mapsto x=\alpha_j+(x+\alpha_j)$

$x-\alpha_j\mapsto \alpha_j(x-\alpha_j)+(x-\alpha_j)^2$

$\vdots$

$(x-\alpha_j)^i\mapsto \alpha_j(x-\alpha_j)^i+(x-\alpha_j)^{i+1}$

בסיס ז'ורדן.

3. קטגוריות ופונקטורים

הגדרה: קטגוריה $\mathcal{C}$ היא מורכבת מ:
1) אוסף של אובייקטים $ob(\mathcal{C})$
2) אוסף של חצים

לכל שני אובייקטים $X,Y \in Ob(\mathcal{C})$, אוסף $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$

3) $X,Y,Z \in Ob(\mathcal{C})$ יש העתקת הרכבה

$$Hom_{XY} \times Hom_{YZ} \to Hom(X,Z)$$

$$(f,g) \mapsto g \circ f \quad \text{שמסומן}$$

ומקיים את האקסיומות:
1) הרכבה היא אסוציאטיבית.
2) לכל X אובייקט קיים $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ יחידה ימנית ושמאלית ביחס להרכבה.

ניתן להניח ש $Ob(\mathcal{C})$ הוא מחלקה, $Hom(X,Y)$ קבוצות (קטגוריות קטנות מקומית)

<u>פתרון אחר</u>: להניח שכל האובייקטים והמורפיזמים חיים בתוך קבוצה אחת שנקראת "יקום". אקסיומה של גרותנדיק: לכל קבוצה יש יקום שהיא בתוכו. אם יש מונה חזק. (או נניח?) אז כל הסודרים שמתחת בלה בלה.

נסמן בקיצור $X \in \mathcal{C}$ במקום $X \in Ob(\mathcal{C})$ ונסמן $X \xrightarrow{f} Y$ או $f: X \to Y$ במקום $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$

<u>קטגוריות שכיחות:</u>

Set, $Ring$, $RMod$, $RModf$, Top, Set^*

האובייקטים (X,x), X קבוצה והמורפיזמים $f \in Hom((X,x),(Y,y))$ והמורפיזם $f: X \to Y$; $f(x)=y$

שבהם

ויש מורפיזמים הם לא פונקציות. $\cdot \to G$

יש שני אובייקטים עם חץ אחד ביניהם

דוגמא: HTop - Homotopy

אובייקטים מרחבים טופולוגיים. והחצים העתקות עד כדי שקילות הומוטופית.

דוגמא: בהינתן מרחב טופולוגי X, נגדיר X_{op}

האובייקטים הם קבוצות פתוחות של X, מספר $|Hom_{X_{op}}(U,V)| = \begin{cases} 1 & U \subseteq V \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

הערה חשובה: אם יש תכונה ב-Top ~~שאלה~~ שאנחנו יכולים לנסח אותה בשפה של קטגוריות נוכל להכליל לקטגוריות אחרות

דוגמא: בהינתן קטגוריה C ניתן להגדיר את C^{op}

האובייקטים הם כמו ב-C והחצים הפוכים:

$$Hom_{C^{op}}(X,Y) := Hom_C(Y,X)$$

קטגוריה C' נקראת תת קטגוריה של C אם $Ob(C') \subseteq Ob(C)$

וגם ~~$(X,Y)\in Ob(C')$~~ ל- $X,Y \in Ob(C')$

$$Hom_{C'}(X,Y) \subseteq Hom_C(X,Y)$$

אם יש שוויון ⟵ תת קטגוריה מלאה.

קטגוריה נקראת דיסקרטית אם יש רק את מורפיזמי הזהות.

סופית אם יש מס' סופי של מורפיזמים

(ובפרט מס' סופי של אובייקטים)

groupoid אם כל החצים הם איזומורפיזמים.

בקטגוריה $f: X \to Y$ הוא איזומורפיזם אם $\exists g: Y \to X$

כך ש- $g \circ f = id_X \quad f \circ g = id_Y$

דוגמא: תהי G חבורה נסתכל על הקטגוריה $\mathcal{G}$: יש אובייקט

אחד a $\quad Hom(a,a) = G$

g

הגדרות מהשיעור הקודם: [illegible]

אובייקט $a \in C$ נקרא התחלי אם $|Hom(a,x)| = 1$ לכל $x \in C$

יחיד עד כדי איזו' יחיד.

אובייקט $a \in C$ נקרא סופי אם התחלי ב- C^{op}

אובייקט נקרא אובייקט האפס אם התחלי וסופי $(a = 0)$

יש מורפיזם האפס. $0: X \to Y$

$X \to 0 \to Y$

הגדרה: יהיו $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ שתי קטגוריות.

פונקטור (קו-וריאנטי) $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ זה העתקה

$F: Ob(\mathcal{A}) \to Ob(\mathcal{B})$ ולכל $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ העתקה

$F: Hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{B}}(FX,FY)$

כך ש-

$$F\, id_X = id_{FX}$$

$$F\, g \circ f = Fg \circ Ff$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "Fg\circ f"] & FY \arrow[r, "Fg"] & FZ \end{tikzcd}$$

פונקטור קונטרה-וריאנטי זה פונקטור $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{op}$

דוגמאות: פונקטור שוכח

$for: Grp \to Set^*$

$G \to (G, e)$

$for: Grp \to Set$

$for: Top \to Set$

⊛ $Hom(X, \cdot)$ הבינן $Hom_C(X, \cdot): C \to Set$, $X \in C$

$Y \to Hom(X,Y)$

$Hom(X,f): Hom_C(X,Y) \xrightarrow{f\circ} Hom_C(X,Z)$

באופן דומה, $Hom(\cdot, X)$: קונטרה וריאנטי

⊛ X, x מרחב טופולוגי מנוקד.

$Cov(X) =$ אובייקט: Y, y מנוקד עם העתקת כיסוי $f: Y \to X$, $f(y) = x$

מורפיזמים:

$$\begin{tikzcd} (Y,y) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\copyright"] & (Z,z) \arrow[dl, "g"] \\ & (X,x) & \end{tikzcd}$$

$$F: Cov(X,x) \to Set$$

$$F\left((Y,y)_f\right) = f^{-1}(x)$$

תרגול 6

הגדרה: מודול I נקרא אינייקטיבי אם לכל מונו מ-M ל-N, ולכל מורפיזם $\alpha: M \to I$ יש $\beta: N \to I$ כך ש-$\beta\varphi=\alpha$.

טענה: התנאים הבאים שקולים:
1) I אינייקטיבי
2) $Hom(-,I)$ מדויק
3) כל סמק מהצורה $0 \to I \xrightarrow{\varphi} M_1 \to M_2 \to 0$ מתפצלת

$(2) \Leftarrow (1)$ ברור.

$(1) \Rightarrow (3)$ ברור. לוקחים $\alpha = id_I$, $\varphi=\varphi$

$(3) \Rightarrow (2)$: נשכן את I באינייקטיבי J, נקבל סמק $0 \to I \to J \to$ משלים $\to 0$

מתפצלת: $J \simeq I +$ משלים

כיוון ש-$Hom(-,J) = Hom(-,I) \oplus Hom(-,\text{משלים})$ ו-$Hom(-,J)$ מדויק, נקבל ש-$Hom(-,I)$ מדויק.

שטיחות

הגדרה: קומפלקס הוא סדרה של R-מודולים עם העתקות $\dots \to M^{i-1} \xrightarrow{d^i} M^i \xrightarrow{d^{i+1}} M^{i+1}$

כך ש- $d^{i+1} \circ d^i = 0$

$\ker(d^{i+1}) \supseteq Im(d^i)$

עבור קומפלקס $M^\bullet$ נגדיר: $H^i(M^\bullet) = \ker(d^{i+1}) / Im(d^i)$

הגדרה: יהי $M \in \underline{M}(R)$. רזולוציה פרויקטיבית: סדרה מדויקת מהצורה

$$\dots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

עם P_i פרויקטיביים. רזולוציה חופשית/שטוחה מוגדרת דומה.

רזולוציה ~~חופשית/שטוחה מוגד~~ אינג'קטיבית זו סמ"ט מהצורה:

$$0\to M\to I_0\to I_1\to\cdots$$ עם I_j אינג'קטיביים

בהינתן מודול M, ~~מודול~~ N, נקח רזולוציה פרויקטיבית $\to P_1\to P_0\to M\to 0$

נכפול עם N

$$C^\bullet = \cdots\to P_2\otimes N\to P_1\otimes N\to P_0\otimes N\to 0$$

$$Tor^i_A(M,N)=H^{-i}(C^\bullet)$$

מעירות: מוגדר היטב, ו- $Tor^0_A(M,N)=M\otimes_A N$

הערה: רזולוציות פרויקטיביות הן יחידות עד כדי שקילות הומוטופית.
יחידה עד כדי הומוטופיה.

(2) תהא סמ"ק $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ אזי לכל $N\in \underline{M}(A)$ יש סמ"ט:

$$M_1\otimes N\to M_2\otimes N\to M_3\otimes N\to 0$$

$$Tor^1(M_1,N)\to Tor^1(M_2,N)\to Tor^1(M_3,N)$$

$$Tor^2(M_3,N)$$

(2.1) יש רזולוציה משותפת

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & P_1^1 & \to & P_2^1 & \to & P_3^1 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P_1^0 & \to & P_2^0 & \to & P_3^0 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & 0
\end{array}$$

(4) $Tor^i_A(N,M)=Tor^i_A(M,N)$ $\forall i,M,N$

Scanned with CamScanner

טענה: יהי M - מודול. התה"ש:

1) M - שטוח

2) $Tor^1(M,-)=0$

3) $Tor^i(M,-)=0 \quad \forall i>0$

4) לכל סמ"ק $0\to M'\to M\to M''\to 0$ ולכל $N\in \underline{M}(R)$ $0\to M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N\to 0$ מדויקת

הוכחה: $(1)\Rightarrow(3)$ מסימטריה

$(3)\Rightarrow(2)$ ברור

$(2)\Rightarrow(4)$ מהסמ"א. יש $0 \to \overset{0}{Tor^1(M'',N)} \to M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N \to 0$

$(2)\Rightarrow(1)$ אם $0\to N'\to N\to N''\to 0$ מדויקת, נעצר עם M:

$\underbrace{\cancel{Tor^1(N'',M)}}_{0 \text{ מסימטריה}} \to M\otimes N'\to M\otimes N\to M\otimes N''\to 0$

$(4)\Rightarrow(2)$ נקח אפי' $A^\Gamma \twoheadrightarrow M$ | Γ - מונו

נסמן הגרעין ב-K. אז יש סמ"ק

$0\to K\to A^\Gamma\to M\to 0$ (*)

יהי $N\in \underline{M}(R)$. נעצר את (*) עם N:

$\underbrace{\cancel{Tor^1(A^\Gamma,N)}}_{0} \to Tor^1(M,N)\to K\otimes N\to A^\Gamma\otimes N\to M\otimes N\to 0$

0 כי A^Γ שטוח

כיוון ש $0\to K\otimes N\to A^\Gamma\otimes N\to M\otimes N\to 0$ מדויקת נקבל $Tor^1(M,N)=0$

מודול M נקרא מוצג סופית אם יש $m,n\geq 0$ טבעיים וסדרה מדויקת מהצורה $A^n\to A^m\to M\to 0$

תזכורת: אם יש סדרה מדויקת מהצורה $0\to K\to N\to M\to 0$

N - נ"ס, M - מ"ס $\Leftarrow$ K נ"ס.

תרגיל: יהי M - R מודול שטוח מ"ס מעל חוג מקומי (R,m) אז M חופשי.

$M \leftarrow A^n$ אפימורפיזם עם n מינימלי.

פתרון: אז יש סדרה מדויקת $0 \to K \to A^n \to M \to 0$

נ"ס

נטנזר עם k

$$0 \to K\otimes k \to k^n \xrightarrow{\sim} M\otimes k \to 0$$

מ- נקיימה זה איזו'

לכן $K\otimes_A k=0$, מנקיימה, $K=0$.