אלגברה ב3

© ארזים

1 בינואר 2017

1 חוגי נתר

תרגיל יהי A חוג ויהי M מודול נתר מעל A. יהי

$$u : M \to M$$

הומומורפיזם על של מודולים מעל A. הוכיחו כי u הוא איזומורפיזם.

פתרון לכל $m \geq 0$ מתקיים

$$\ker\left(u^m\right) < M$$

כמו כן

$$\ker\left(u^m\right) < \ker\left(u^{m+1}\right) < \dots$$

ולכן קיים n עבורו

$$\ker\left(u^n\right) = \ker\left(u^{n+1}\right) = \dots$$

יהי $y \in \mathrm{Im}\left(u^n\right)$. אזי קיים $x \in M$ עבורו $y = u^n\left(x\right)$. כעת,

$$0 = u\left(y\right) = u\left(u^n\left(x\right)\right) = u^{n+1}\left(x\right)$$

לכן $x \in \ker\left(u^{n+1}\right) = \ker\left(u^n\right)$, כלומר $y = u^n\left(x\right) = 0$. אזי u חד־חד־ערכי על $\mathrm{Im}\left(u^n\right)$, ובגלל שנתון כי u על מתקיים

$$\mathrm{Im}\left(u^m\right) = M$$

לכן u חד חד ערכי וסיימנו.

טענה 1.1 יהי R חוג נתר. תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. הוכיחו כי $S^{-1}R$ נתר.

הוכחה: אפשרות 1: כל אידאל $b \subseteq S^{-1}R$ הוא מהצורה $S^{-1}a$ כאשר $a \subseteq R$ אידאל. לכן כל שרשרת של אידאלים בתוך $S^{-1}R$ מתייצבת.
אפשרות 2: כל אידאל של R נוצר סופית, למשל $a = (x_1, \ldots, x_n)$, ואז $S^{-1}a = \left(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}\right)$. ■

תרגיל יהי A חוג נתר מקומי. יהי m האידאל המקסימלי. נסמן $k = A/m$. יהי M מודול נוצר סופית מעל A. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. M חופשי.
2. M שטוח.
3. $m \otimes_A M \to A \otimes_A M$ חד־חד־ערכי.
4. במאמר מוסגר ־ "אני כותב משהו, אל תקראו את זה", אמר המתרגל ־ $\mathrm{Tor}_1^A(k, M) = 0$.

פתרון $1 \Rightarrow 2$: A שטוח מעל A, וסכום ישר של שטוחים הוא שטוח.
$2 \Rightarrow 3$: $(0 \to m \to A) \otimes M$
$3 \Rightarrow 1$: $M \otimes_A k$ מרחב וקטורי סוף מימדי מעל k. יהיו $x_1, \ldots, x_n \in M$ כך שהתמונות שלהם $M \to M \otimes_A k$ בסיס של $M \otimes_A k$.
נגדיר $0 \to N \to A^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0$, עבור $N = \ker\alpha$ ונרצה להוכיח כי $N = 0$, כלומר $M \cong A^n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
m \otimes N & \to & m \otimes A^n & \to & m \otimes M & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A \otimes N & \to & A \otimes A^n & \to & A \otimes M & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to k \otimes N & \to & k \otimes A^n & \to & k \otimes M & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

זוהי דיאגרמה קומוטטיבית, השם ישמור את כולנו. ממנה, על ידי מרדף דיאגרמות מוגזם שאין לי דרך אמיתית לשחזר כאן, מקבלים כי $k \otimes N = 0$, וכי N נוצר סופית בגלל שהחוג A הוא חוג נתר. לכן, מנאקאיימה, נקבל $N = 0$.

תרגיל (לבית) יהי A חוג נתר, ויהי M מודול מעל A שנוצר סופית. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. M שטוח מעל A.
2. M_P חופשי מעל A_P לכל P ראשוני.
3. M_m חופשי מעל A_m לכל m מקסימלי.

"הסלוגן: שטוח זה חופשי מקומית!" ־המתרגל

הגדרה 1.2 יהי A חוג ויהי M מודול מעל A. האידאל הראשוני $P \subseteq A$ נקרא ראשוני משוייך למודול M אם קיים $x \in M$ כך שמתקיים

$$P = \operatorname{Ann}(x)$$

באופן שקול, במודול M יש תת מודול שאיזומורפי למנה A/P.

תרגיל יהי A חוג ויהי M מודול מעליו. נסמן $\Sigma = \{\operatorname{Ann}(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ קבוצת אידאלים לא ריקה. כל איבר מקסימלי בתוך Σ הוא ראשוני שמשוייך למודול M.

הוכחה: יהי $M = x_0 \neq 0$ כך שהאידאל $P = \operatorname{Ann}(x_0)$ מקסימלי בתוך Σ. יהיו $f, g \in A$. נניח כי $f \cdot g \in P$. אם $f \in P$ סיימנו. אחרת,

$$f x_0 \neq 0$$

לכן $g(f x_0) = 0$. לכן $\operatorname{Ann}(x_0) \subseteq \operatorname{Ann}(f x_0)$, ולכן שווים. g באיבר הימני, ולכן גם בשמאלי וקיבלנו שהאידאל ראשוני. ∎

מסקנה 1.3 אם A נתר וכן $M \neq 0$ אזי $\operatorname{Ass}(M) \neq \emptyset$.