אלגברה ב3

ארזים ©

22 בדצמבר 2016

תרגיל בחוג $R=\mathbb{Z}[t]$ יהי $m=(2,t)$ ויהי $q=(4,t)$.

1. הוכיחו כי m מקסימלי.
2. הוכיחו כי q פרימארי.
3. הוכיחו כי $m^2\subsetneq q\subsetneq m$.

פתרון 1. נגדיר

$$\begin{aligned}\varphi &: R\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\ f&\mapsto f(0)\mod 2\\ \ker\varphi&=(2,t)\end{aligned}$$

f כמובן על. לכן $R/(2,t)\cong\mathbb{F}_2$ שדה, ולכן m מקסימלי.

2. יהי $R/q=\mathbb{Z}[t]/(4,t)\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $\overline{2}\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ הוא מחלק אפס היחיד, והוא נילפטונטי מסדר 2, ולכן q פרימארי.
3. $4,t\in(2,t)$, $2\notin(4,t)$, ולכן $q\subsetneq m$. $m^2=\left(4,2t,t^2\right)\subseteq(4,t)$, וכן $t\notin m^2$, ולכן $m^2\subsetneq q\subsetneq m$.

תרגיל יהי $\mathbb{K}$ שדה, ויהי $R=\mathbb{K}[x,y,z]$. נגדיר $p_1=(x,y)$, $p_2=(x,z)$. יהי $a=p_1p_2$. נוכיח כי $a=p_1\cap p_2\cap m^2$, כאשר $m=(x,y,z)$ מקסימלי, פירוק פרימרי.

פתרון p_1,p_2 ראשוניים, כי המנות בהם הן תחומי שלמות. m מקסימלי שכן המנה בו היא $\mathbb{K}$. m^2 פרימארי כחזקה של מקסימלי. כעת,

$$\begin{aligned}a=p_1p_2&=\left(x^2,xy,xz,yz\right)\\ p_1\cap p_2&=(x,yz)=(x,xy,xz,yz)\end{aligned}$$

כעת נוכל לראות כי

$$p_1\cap p_2\backslash p_1p_2=\mathbb{K}x-\{0\}$$

וכעת

$$a=p_1\cap p_2\cap m^2$$

נראה שהפירוק מינימלי. נראה שהוא מינימלי:

$$x \notin a \subsetneq p_1 \cap p_2 \ni x$$
$$y^2 \notin a \subsetneq p_1 \cap m^2 \ni y^2$$
$$z^2 \notin a \subsetneq p_2 \cap m^2 \ni z^2$$

לכן זה פירוק פרימרי מינימלי. הראשוניים המינימליים המשוייכים לאידאל a הם p_1, p_2, והראשוניים המשוייכים בכלל הם p_1, p_2, m.
נרצה לכתוב כעת $a = p_1 \cap p_2 \cap m'$ עבור פרימרי אחר m'. למשל נוכל לקחת $m' = \left(x^2, y, z\right)$, שמקיים $m^2 \subseteq m' \subseteq m$, ולכן $\sqrt{m'} = m$, כמו שצריך. את החיתוך של השניים האחרים אי אפשר לשנות, ואפילו אותם אי אפשר להסיר.

תרגיל יהי $X = [0,1]$ (או כל מרחב האוסדורף קומפקטי אינסופי). יהי $R = C\left(X\right)$ חוג הפונקציות הרציפות הממשיות על X.

1. יהי $x \in X$. הוכיחו כי $m_x = \left\{\varphi \in C\left(X\right) \mid \varphi\left(x\right) = 0\right\}$ אידאל מקסימלי.
2. הוכיחו כי כל אידאל מקסימלי של $C\left(X\right)$ הוא מהצורה שלעיל.
3. הוכיחו שלאידאל (0) בחוג $C\left(X\right)$ אין פירוק פרימרי.

פתרון 1. נגדיר הומומורפיזם

$$ev_x : C\left(X\right) \to \mathbb{R}$$
$$ev_x\left(\varphi\right) = \varphi\left(x\right)$$
$$\ker\left(ev_x\right) = m_x$$
$$C\left(x\right) \big/ m_x \cong \mathbb{R}$$

ולכן m_x מקסימלי.

2. יהי m אידאל מקסימלי של $C\left(X\right)$. אם $m \nsubseteq m_x$ אזי לכל $x \in X$ קיימת פונקציה $m \ni \varphi_x\left(x\right) \ni 0$. φ_x רציפה, ולכן φ_x לא מתאפסת בסביבה של x. בגלל היינה־בורל, קיים כיסוי סופי של X על ידי סביבות של הנקודות $\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}$ עם סביבות $\left\{V_1, \ldots, V_n\right\}$. לכן, הפונקציה $f = \varphi_{x_1}^2 \cdot \cdots \cdot \varphi_{x_n}^2 \in m$ לא מתאפסת, ולכן הפיכה, בסתירה.
3. נוכיח שכל אידאל פרימארי שייך לאידאל מקסימלי יחיד. יהי $a \lhd R$ אידאל. נניח כי $a \subseteq m_x \cap m_y$, $x \neq y$. בגלל שלקחנו X האוסדורף, קיימות סביבות $x \in V_x$, $y \in V_y$ כך שמתקיים $V_x \cap V_y = \emptyset$. לכן קיימות פונקציות רציפות $f\left(x\right) = 1$, $f\left(X \backslash V_x\right) = 0$, $g\left(y\right) = 1$, $g\left(X \backslash V_y\right) = 0$. לכן

$$f \cdot g\left(X\right) = f \cdot g\left(X \backslash V_x \cup X \backslash V_y\right) = 0$$

לכן $f \cdot g \in a$, אבל $f \notin a$, $g^k \notin a$. לכן a לא פרימרי. $q_1, \ldots, q_n$ פרימאריים. בגלל שקיים x_i עבורו $q_i \subseteq m_{x_i}$, נבחר נקודה $y \neq x_i$ ואז בחיתוך $q_1 \cap \cdots \cap q_n$ קיימת f עבורה $f\left(y\right) \neq 0$, ולכן החיתוך בוודאות אינו 0.