אלגברה ב3

ⓒ ארזים

15 בדצמבר 2016

1 לוקליזציות

תרגיל יהי A חוג ויהי P אידאל ראשוני בו. הוכיחו כי

$$A_P/P_P \cong K\left(A/P\right)$$

כאשר K הוא (פונקטור) שדה שברים.

פתרון

$$S = A\backslash P$$
$$S^{-1}\left(A/P\right) \cong S^{-1}A/S^{-1}P$$

נסמן

$$\pi : A \to A/P$$

לכן

$$\pi\left(S\right)^{-1}\left(A/P\right) \cong S^{-1}\left(A/P\right)$$

כמובן

$$\pi\left(S\right) = A/P\backslash\left\{0\right\}$$

לכן

$$\pi\left(S\right)^{-1}\left(A/P\right) = K\left(A/P\right)$$

תרגיל (הלמה של סר) יהי A חוג ויהיו $A = (f_1, \dots, f_n)$. נקרא לסדרה סופית כזו פירוק יחידה. יהי M מודול מעל A. נסמן

$$S_i = \left\{1, f_i, f_i^2, \dots\right\}$$
$$M_{f_i} = S_i^{-1} M$$

נסתכל בסדרה

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} M_{f_i}$$

הוכיחו כי φ חד־חד־ערכי כאשר

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{1}\right)_i$$

פתרון יהי $m \in M$ עם

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{1}, \dots, \frac{m}{1}\right) = 0$$

לכל i קיים N_i כך שמתקיים

$$f_i^{N_i} m = 0$$

ניקח $N = \max N_i$. כעת

$$f_i^N m = 0$$

לכל i. בגלל שמתקיים

$$(f_1, \dots, f_n) = A$$

אזי גם

$$(f_1, \dots, f_n)^{nN} = A$$

אזי ניתן לרשום את 1 כסכום של מכפלות ובכל מכפלה מופיע לפחות פעם אחת f_i^N כלשהו, כלומר

$$Am = 0$$
$$m = 0$$

הוכחה אלטרנטיבית: לכל אידאל P ראשוני של A קיים $i(p)$ כך שמתקיים

$$f_{i(p)} \notin P$$

ההעתקה $\psi M \to \bigoplus M_P$, על פני כל הראשוניים P היא חד חד ערכית, כי ראינו שאיבר מתאפס אם ורק אם הוא מתאפס בכל לוקליזציה. כעת בגלל ההעתקה

$$g : \bigoplus M_{f_i} \to \bigoplus M_P$$
$$g\left(\frac{m_i}{f_i^{n_i}}\right)_i = \left(\frac{m_{i(p)}}{f_{i(p)}^{n_{i(p)}}}\right)_P$$

שמקיימת $g \circ \varphi = \psi$, φ חייבת להיות חד־חד־ערכית.

תרגיל (לבית)

$$0 \to M \to \bigoplus_i M_{f_i} \to \bigoplus_{(i,j), i\neq j} M_{f_i f_j} \to \bigoplus_{i,j,k} M_{f_i, f_j, f_k} \to \dots$$

וכן הלאה. הוכיחו שזו סדרה מדוייקת.

תרגיל תהי B אלגברה שטוחה מעל A על ידי ההומומורפיזם $f : A \to B$. לכל אידאל a של A נגדיר $a^e = Bf(a)$, ולכל אידאל b של B נגדיר $b^c = f^{-1}(b) \cap A$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.

1. לכל אידאל $A \triangleleft a$ מתקיים $a^{ec} = a$.
2. העתקה $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ על ידי $p \to p^c$ היא על.
3. לכל אידאל m מקסימלי של A מתקיים $m^e \neq (1)$.
4. לכל מודול M מעל A שאינו 0, $M_B \neq 0$
5. לכל מודול M מעל A, ההעתקה $m \to 1 \otimes_A m$ היא חד־חד־ערכית.

במקרה זה נאמר כי B שטוחה באופן נאמן מעל A.

פתרון $2 \Leftarrow 1$: טריוויאלי ־ לכל p אידאל ראשוני של A נקבל $p^{ec} = p$.
$3 \Leftarrow 2$: יהי m אידאל מקסימלי של A. אזי קיים אידאל ראשוני n של B עבורו $n^c = m$. ואז

$$m^e \subseteq nc^e \subseteq n \subsetneq B$$

$4 \Leftarrow 3$: יהי $M \neq 0$ כך שמתקיים $M_B = 0$ (בשלילה). לכל $M' \subseteq M$ מתקיים $M'_B \subseteq M_B$ ולכן $M'_B = 0$. לכן מספיק להוכיח עבור מודולים ציקליים. נניח כי $M = A/a$. אזי

$$M_B = B/a^e$$

לכן $a^e = B$, כלומר $a = A$, כי אחרת יש m מקסימלי של A שמכיל את a, בסתירה לסעיף 3.

$1 \Rightarrow 5, 5 \Rightarrow 4$: שיעורי בית.

הגדרה 1.1 יהי M מודול מעל A. M נקרא ציקלי אם קיים $m \in M$ כך שמתקיים $M = \langle m \rangle$. אם $M = \langle m \rangle$, אזי $M \cong A/a$, עבור $a = \mathrm{Ann}\,(m)$.

תרגיל יהי A חוג. יהי M מודול מעל A. נגדיר את התומך של M:

$$\mathrm{supp}\,(M) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A)$$

אידאל ראשוני P שייך לתומך אם ורק אם $M_P \neq 0$. ניזכר שאנחנו יודעים שמתקיים $M = 0$ אם ורק אם $\mathrm{Supp}\,(M) = \emptyset$.

1. יהי a אידאל של A. נסמן $V\,(a) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A)$ - קבוצת כל האידאלים הראשוניים שמכילים את a. הוכיחו כי $\mathrm{Supp}\,\big(A/a\big) = V\,(a)$.
2. אם $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ סידרה מדוייקת אזי

$$\mathrm{Supp}\,(M) = \mathrm{Supp}\,(M') \cup \mathrm{Supp}\,(M'')$$

הוכחה:

1. $S^{-1}A = S^{-1}a$ אם ורק אם $S \cap a = \emptyset$, ולכן נסיים - $S = A \backslash P$, ולכן

$$S^{-1}\left(A/a\right) = 0 \iff S^{-1}a = S^{-1}A = S^{-1}a \iff S \cap P = \emptyset \iff a \subseteq P$$

2. יהי P אידאל ראשוני. אזי

$$0 \to M'_P \to M_P \to M''_P \to 0$$

זו סדרה מדוייקת. אם $p \notin \mathrm{Supp}\,(M') \cup \mathrm{Supp}\,(M'')$ אזי מהדיוק נובע $p \notin \mathrm{Supp}\,(M)$. אם $p \notin \mathrm{Supp}\,(M)$ אז שוב מהדיוק נקבל את השייכות השנייה.

■