אלגברה ב3

ארזים ©

8 בדצמבר 2016

1 לוקליזציה

יהי A חוג. תהי $S \subseteq A$ קבוצה כפלית (מכילה את היחידה וסגורה לכפל). הגדרנו את $S^{-1}A$ - חוג השברים. זוהי A אלגברה שטוחה, כלומר טנזור איתה שומר דיוק.

בהנתן חוג A נתבונן בספקטרום $\mathrm{Spec}(A)$, קבוצת האידאלים הראשוניים של A, ובספקטרום המקסימלי, $\mathrm{mSpec}(A)$, קבוצת האידאלים המקסימליים של A. בהינתן M מודול מעל A, נוכל להתאים בין כל אידאל ראשוני P למודול M_P מעל A_P. כמו כן, אם $M_P = 0$ לכל P אזי $M = 0$. טוב עוד יותר - אם M מודול נוצר סופית מעל A, נוכל להתאים בין כל אידאל מקסימלי לבין המרחב הווקטורי M_m/m_mM_m מעל השדה

$$M_m/m_m \cong A/m = \mathbb{K}(m)$$

תרגיל יהי N מודול נוצר סופית מעל A. הוכיחו כי אם $N_m/m_mN_m = 0$ לכל אידאל מקסימלי m של A, אזי $N = 0$.

פתרון אם $N_m/m_mN_m = 0$ אזי $N_m = m_mN_m$, ולכן לפי נאקאיימה $N_m = 0$ לכל m מקסימלי. לכן $N = 0$.

תרגיל יהי $f : A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. תהי $S \subseteq A$ קבוצה כפלית. נסמן $T = f(S)$ (שהיא קבוצה כפלית). אזי B הוא מודול מעל A, $S^{-1}B$ הוא $S^{-1}A$ מודול, וגם $T^{-1}B$ הוא $S^{-1}A$ מודול - עד כאן הכל טריוויאלי - אבל גם

$$S^{-1}B \cong T^{-1}B$$

פתרון

$$\varphi : S^{-1}B \to T^{-1}B$$
$$\varphi\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{b}{\varphi(s)}$$

אם זה מוגדר היטב אז זה על. $\frac{b_1}{s_1} = \frac{b_2}{s_2}$ אם ורק אם קיים $s \in S$ עבורו $s(b_1s_2 - b_2s_1) = 0$, אם ורק אם קיים $s \in S$ עבורו $f(s)(f(s_2)b_1 - f(s_1)b_2) = 0$, אם ורק אם $\frac{b_1}{f(s_1)} = \frac{b_2}{f(s_1)}$.

לכן φ מוגדרת היטב וחד־חד־ערכית, ולכן סיימנו.

הגדרה 1.1 יהי A תחום שלמות ויהי M מודול מעל A. $m \in M$ נקרא מפותל אם קיים $0 \neq a \in A$ עבורו $am = 0$. נגדיר

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists a \neq 0 . am = 0\} = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}_A(m) \neq 0\}$$

תרגיל הוכיחו כי $T(M) \leq M$.

פתרון יהי $m \in T(M)$, ויהי $b \in A$. אזי קיים $a \neq 0$ עבורו $am = 0$ ואז $a(bm) = 0$, ולכן $bm \in T(M)$. אם $n \in T(M)$ קיים $c \neq 0$ כך שמתקיים $c \cdot n = 0$, ואז

$$ca(n+m) = 0$$

השתמשנו בכך שמתקיים $ca \neq 0$ כי אחנו בתחום שלמות. לכן $n+m \in T(M)$ ולכן $T(M) \leq M$.

תרגיל (לבית) $T\left(M/T(M)\right) = 0$.

תרגיל (לבית) אם

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

סדרה מדוייקת, אזי

$$0 \to T(M') \to T(M) \to T(M'') \to 0$$

סדרה מדוייקת (הפונקציות הן פשוט צמצום).

תרגיל $T(M)$ הוא הגרעין של

$$f : M \to S^{-1}(M)$$

כאשר $S = A \setminus \{0\}$.

פתרון נסמן

$$S^{-1}A = \mathbb{K}(A)$$

זהו שדה שברים. אם $m \in \ker f$ אזי $\frac{m}{1} = 0$, כלומר קיים $s \in S = A \setminus \{0\}$ כך שמתקיים $sm = 0$, ולכן $m \in T(m)$. להיפך באותה צורה.

מסקנה 1.2 יהי M מודול מעל , כאשר A תחום שלמות. אזי הבאים שקולים:

1. M חסר פיתול ($T(M) = 0$).

2. M_P חסר פיתול לכל אידאל ראשוני P ($T(M_P) = (T(M))_P$).

3. M_m חסר פיתול לכל אידאל מקסימלי m ($T(M_m) = (T(M))_m$).

נראה כי

$$S^{-1}M \supseteq T\left(S^{-1}M\right) = S^{-1}T(M) \subseteq S^{-1}M$$

כי $S^{-1}A\otimes_A$ מדוייק.
יהי $\frac{m}{s} \in S^{-1}T(M)$. אזי קיים $a \neq 0$ עבורו $am = 0$. ואז

$$a\left(\frac{m}{s}\right) = 0$$

כלומר $\frac{m}{s} \in T\left(S^{-1}M\right)$. יהי $\frac{x}{s} \in T\left(S^{-1}M\right)$, אזי קיים $\frac{a}{t} \neq 0$ עבורו $\frac{ax}{st} = 0$. אזי קיים $s' \in S$ עבורו $s'ax = 0$ ואז $x \in T(M)$, ולכן $\frac{x}{s} \in S^{-1}T(M)$, וסיימנו את ההכלה הדו־כיוונית.

תרגיל יהי M מודול מעל A ויהי $a \triangleleft A$ אידאל. נניח כי $M_m = 0$ לכל אידאל מקסימלי m שמכיל את a. אזי $M = aM$.

פתרון נתבונן במנה

$$N = M/aM$$

נרצה להראות $N = 0$. יהי $A \triangleleft m \subseteq a$, m מקסימלי. אזי $m/a \triangleleft A/a$ אידאל מקסימלי. ידוע כי $N_m = 0$ לכל $a \subseteq m \triangleleft A$. בגלל הפונקציה $f : A \to A/a$ של המנה באידאל a, ובגלל תרגיל קודם שראינו היום, מתקיים $N_m \cong N_{(m/a)} = 0$,

ולכן $N_n = 0$ לכל אידאל מקסימלי $n \triangleleft A/a$, ולכן $N = 0$.