אלגברה ב3

ארזים ©

1 בדצמבר 2016

1 פיתול, שטיחות ומכפלה טנזורית של אלגבראות

1.1 פיתול

הגדרה 1.1 יהי M מודול מעל חוג R. נסמן

$$\mathrm{Tor}\left(M\right)=\left\{m\in M\mid\exists r\neq0.rm=0\right\}\subseteq M$$

תכונות

1. $\mathrm{Tor}\left(M\right)<M$.
2. נאמר כי M הוא מודול פיתול אם $\mathrm{Tor}\left(M\right)=M$. נאמר כי M הוא מודול חסר פיתול אם $\mathrm{Tor}\left(M\right)=0$.
3. המודול $M/\mathrm{Tor}\left(M\right)$ חסר פיתול.
4. נניח כי $R=\mathbb{Z}$, אזי המודולים הם פשוט חבורות אבליות. אם M מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{Z}$, אזי

$$M=\mathbb{Z}^{r}\oplus\mathrm{Tor}\left(M\right)$$

פירוק זה לא קנוני (כלומר האיזומורפיזם לא קנוני).

תרגיל יהי M מודול שטוח מעל תחום שלמות R. אזי M חסר פיתול.

פתרון נניח בשלילה שקיים פיתול. יהי $m\neq0$ וכן $r\neq0$ עבורם $rm=0$. אזי

$$0\to R\xrightarrow{\times r}R\to R/\left(r\right)\to0$$

סדרה קצרה מדוייקת, ואז

$$0\to M\xrightarrow{\times r}M$$

אבל $0\neq m\in\ker\left(\times r\right)$, כלומר M אינו מודול מדוייק.

תרגיל נניח כי $R=\mathbb{Z}$. יהי A מודול מעל R. אזי A מודול פיתול אם ורק אם $A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0$.

פתרון נניח כי A מודול פיתול, אזי $A=\mathrm{Tor}\left(A\right)$, כלומר לכל $a\in A$ קיים $0\neq n\in\mathbb{Z}$ עבורו $na=0$. כעת $a\otimes q=na\otimes\frac{q}{n}=0$. לכן $A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0$, כי הוא נוצר על ידי טנזורים טהורים, שכולם 0.
בכיוון השני, נניח כי המכפלה הטנזורית מתאפסת. אם A נוצר סופית, אזי $A\cong\mathbb{Z}^{r}\oplus\mathrm{Tor}\left(A\right)$, ואז

$$A\otimes\mathbb{Q}\cong\left(\mathbb{Z}^{r}\oplus\mathrm{Tor}\left(A\right)\right)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Z}^{r}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\oplus\mathrm{Tor}\left(A\right)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}^{r}$$

לכן נובע כי $r=0$, ולכן $A=\mathrm{Tor}\left(A\right)$.
במקרה כללי, נניח כי $a\in A$, ונראה כי $A\in\mathrm{Tor}\left(A\right)$. כמובן $a\otimes1=0$. אזי קיים תת מודול $a\in A_{0}\subseteq A$, כאשר A_{0} נוצר סופית, כך שמתקיים

$$0=a\otimes1\in A_{0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

ולכן מהמקרה הנוצר סופית סיימנו.

1.2 סדרת תרגילים על מכפלה טנזורית של אלגבראות

"אני עושה תזכורת. אם אתם לא צריכים את זה תגידו לי, ואני אעשה בכל זאת - זה בשבילי." -המתרגל

יהיו A,B אלגבראות מעל חוג K. אזי על $A\otimes_{K}B$ קיים מבנה טבעי של אלגברה מעל K:

$$\left(a_{1}\otimes b_{1}\right)\left(a_{2}\otimes b_{2}\right)=a_{1}a_{2}\otimes b_{1}b_{2}$$
$$k\left(a\otimes b\right)=ka\otimes b=a\otimes kb$$

תרגיל הוכיחו:

1. תהי A אלגברה מעל K. קיים איזומורפיזם טבעי

$$\psi:K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]\otimes A\to A\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]$$

2. תהי R אלגברה מעל K, ויהי $I\lhd K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]$. קיים איזומורפיזם טבעי

$$\psi:\left(K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]/I\right)\otimes_{K}R\cong R\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]/R\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]I$$

3.

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$$

פתרון

1. נוכיח רק עבור $n=1$. כל איבר של $K\left[x\right]\otimes A$ ניתן לרשום באופן יחיד בתור

$$\sum_{i=1}^{n}x^{i}\otimes a_{i}$$

שכן מתקיים

$$K\left[x\right]\cong\bigoplus_{i=0}^{\infty}A$$

ואז

$$A\otimes_{K}K\left[x\right]\cong A\otimes_{K}\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty}K\right)\cong\bigoplus_{i=0}^{\infty}A_{i}$$

כעת נגדיר

$$\psi\left(\sum_{i=0}^{n}x^{i}\otimes a_{i}\right)=\sum a_{i}x^{i}$$

וברור שזה חד־חד־ערכי ועל.

2. ניקח את הסדרה

$$I\to K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]\to K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]/I\to0$$

נטנזר עם R:

$$R\otimes_{K}I\to R\otimes_{K}K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]\to K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]/I\otimes_{K}R$$

וכאן $R\otimes_{K}K\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]=R\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]$ מסעיף 1. לכן נסיים.

3. כמובן,

$$\mathbb{C}\cong\mathbb{R}\left[x\right]/\left(x^{2}+1\right)$$

ולכן

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\left(\mathbb{R}\left[x\right]/\left(x^{2}+1\right)\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\left[x\right]/\left(x^{2}+1\right)\cong\mathbb{C}\left[x\right]/\left(x+i\right)\left(x-i\right)\cong$$
$$\cong\mathbb{C}\left[x\right]/\left(x+i\right)\oplus\mathbb{C}\left[x\right]/\left(x-i\right)\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$$

תרגיל תהי L/K הרחבת גלואה סופית, ותהי $G = \mathrm{Gal}\left(L/K\right)$.

$$L \otimes_K L \cong \bigoplus_{i=1}^{|G|} L$$

פתרון $L = K(\alpha)$, כאשר $p(x)$ הפולינום המינימלי של α. כמו כן $p(x) = (x - l_1)\dots(x - l_n)$ מעל L, אבל אי פריק מעל K.

$$L \otimes_K L \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L[x] \big/ x - l_i$$