# אלגברה ב3

ארזים ©

24 בנובמבר 2016

**תרגיל** יהיו $m,n$ שלמים זרים. חשבו את

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

**פתרון** יוצא 0. ניקח $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},y\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}x\otimes y &= 1\cdot(x\otimes y)=(\alpha n+\beta m)(x\otimes y)=\alpha n(x\otimes y)+\beta m(x\otimes y)=\\ &=(\alpha nx\otimes y)+(x\otimes\beta my)=(0\otimes y)+(x\otimes 0)=0+0=0\end{aligned}$$

**פתרון** אלטרנטיבי: נתבונן בסדרה המדוייקת מימין

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{xn}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to 0$$

נוכל לקחת טנזור ולקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\to 0\\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\underset{\sim}{\xrightarrow{xn}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\to 0\end{aligned}$$

כדי לשמור דיוק, משום שההעתקה $xn$ חד חד ערכית ועל, המודול השלישי חייב להיות 0.

**תרגיל** חשבו את

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

**פתרון**

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{p^2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\to 0$$

ניקח טנזור

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to 0\\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\xrightarrow[0]{p^2x} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to 0\end{aligned}$$

כדי לשמור דיוק, היות וההעתקה $p^2x$ היא העתקת האפס, ההעתקה הבאה חייבת להיות איזומורפיזם. לכן

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

**תרגיל** חשבו מאוד: הוכיחו כי לכל $R$ חוג ולכל $M$ מודול מעל $R$ ההעתקה

$$\begin{aligned}f:R\otimes_R M &\to M\\ f:r\otimes m &\to rm\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם של חוגים.

**פתרון** זה כמובן הומומורפיזם. ההופכי הוא $\psi:m\to 1\otimes m$. אכן

$$\begin{aligned}f\psi(m) &= f(1\otimes m)=m\\ \psi f(r\otimes m) &= \psi(rm)=1\otimes rm=r\otimes m\end{aligned}$$

ראינו בשיעור כי

$$N\otimes(M_1\otimes M_2)\cong(N\otimes M_1)\oplus(N\otimes M_2)$$

ואפשר להסביר זאת על ידי

$$\begin{aligned}M_1 &\to M_1\oplus M_2\to M_2\to 0\\ M_2 &\to M_1\oplus M_2\to M_1\to 0\end{aligned}$$

וניקח טנזור

$$\begin{aligned}N\otimes M_1 &\to N\otimes(M_1\oplus M_2)\to N\otimes M_2\to 0\\ N\otimes M_2 &\to N\otimes(M_1\oplus M_2)\to N\otimes M_1\to 0\end{aligned}$$

ולכן נובע כי

$$N\otimes(M_1\otimes M_2)\cong(N\otimes M_1)\oplus(N\otimes M_2)$$

**הערה 0.1** נניח שצריך לחשב את $M\otimes_R N$. נוכל לקחת

$$\begin{array}{ccc}\bigoplus_J R & \twoheadrightarrow & \bigoplus_I R\twoheadrightarrow M\\ \bigoplus_J N & \twoheadrightarrow & \bigoplus_I N\twoheadrightarrow M\otimes_R N\end{array}$$

על ידי טנזור. כמובן, $I,J$ גדולים מספיק.

**תרגיל** (לפי המתרגל, תרגיל מוזר) יהי $R$ חוג ויהי $a$ אידאל. יהיו $M,N$ מודולים מעל $R/a$ (כלומר $M,N$ מודולים מעל $R$ עם $a\subseteq \operatorname{Ann}(M),\operatorname{Ann}(N)$). אזי

$$M\otimes_{R/a}N\underset{\sim}{\leftarrow} M\otimes_R N$$

**פתרון** ההעתקות הן

$$m\otimes_{R/a}n\leftrightarrow m\otimes_R n$$

**תרגיל** חשבו את

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

(שוב)

**פתרון** $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ הם מודולים מעל $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. לכן

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

**הערה** יהי $\mathbb{K}$ שדה, ויהי $V,W$ מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{K}$. אם $\{e_i\}$ בסיס של $V$, $\{f_i\}$ בסיס של $W$, אזי $\{f_i\otimes e_j\}$ בסיס של $V\otimes_{\mathbb{K}}W$. בפרט אם $V\otimes_{\mathbb{K}}W=0$ אזי $V=0$ או $W=0$.

**תרגיל** (לפי המתרגל, תרגיל חשוב) יהי $(R,m)$ חוג מקומי. יהיו $M,N$ מודולים נוצרים סופית מעל $R$. הוכיחו שאם $M\otimes_R N=0$ אזי $M=0$ או $N=0$.

**פתרון**

$$0=R/m\otimes_R(M\otimes_R N)\otimes_R R/m=\left(R/m\otimes_R M\right)\otimes_R\left(N\otimes_R R/m\right)$$

כעת, $R/m\otimes_R M\cong M/mM$. מדוע? נתבונן בסדרה הבאה ונטנזר אותה:

$$m\to R\to R/m\to 0$$

לאחר טנזור

$$\begin{aligned} m\otimes_R M &\to R\otimes_R M\to R/m\otimes_R M\to 0\\ mM &\to M\to R/m\to 0\end{aligned}$$

כעת

$$0=M/mM\otimes_R N/mN$$

אבל אלה שניהם מודולים מעל $R/m$ - שהוא שדה, ולכן הן מרחבים ווקטוריים מעליו, ולכן אחד מהם מתאפס. מנאקאיימה, אחד המודולים הוא 0.

**טענה 0.2** יהי $R$ חוג, $a<R$ אידאל ויהי $M$ מודול מעל $R$ אזי

$$R/a\otimes_R M\cong M/aM$$

**הוכחה:** ראינו לפני רגע. ■