אלגברה ב3

ארזים ©

17 בנובמבר 2016

1 מודולים

משפט 1.1 (גרסה של הלמה של נאקאיימה) יהי R חוג, ויהי M מודול נוצר סופית מעל R. יהי $J \triangleleft R$ אידאל עבורו $JM = M$. אזי $\emptyset \neq \mathrm{Ann}\left(M\right) \cap \left(1 + J\right)$.

מסקנה 1.2 יהי A חוג מקומי עם אידאל מקסימלי m, ויהי M מודול נוצר סופית מעל A. אזי $M = 0$ אם ורק אם $M/mM = 0$ (זהו מרחב ווקטורי מעל השדה A/m).

תרגיל יהי M מודול נוצר סופית מעל חוג R, ויהי $J \triangleleft R$ כך שמתקיים $JM = M$. אזי קיים $j \in J$ כך שמתקיים $jm = m$ לכל $m \in M$.

פתרון יהי $1 + j_0 \in \mathrm{Ann}\left(M\right)$, אזי לכל $m \in M$ מתקיים $\left(1 + j_0\right) m = 0$, ואם נסמן $j = -j_0$, אז לכל $m \in M$ מתקיים $jm = m$.

תרגיל יהי K חוג, ויהי M מודול נוצר סופית מעל K. יהי $f : M \to M$ אפימורפיזם של מודולים מעל K. הוכיחו כי f הוא איזומורפיזם.

פתרון יהי $R = K\left[x\right]$. נגדיר על M מבנה של מודול מעל R על ידי

$$x \cdot m = f\left(m\right)$$

כיוון שההעתקה f על, מתקיים $IM = M$ עבור $I = \left(x\right) \triangleleft R$. לכן קיים $g \in I$ כך שמתקיים $gm = m$ לכל $m \in M$. כעת, $g = qx$, ואז $q\left(f\right)$ היא ההופכית של f:

$$q\left(f\right) \cdot f = g\left(f\right) = 1$$

ולכן f איזומורפיזם.

דוגמא אם K שדה אזי M מרחב ווקטורי סוף מימדי, ואז אנחנו מכירים את הטענה מאלגברה לינארית. לעומת זאת, אם לא דורשים נוצרות סופית, ניקח R^{∞} ונתבונן בהעתקה $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\right) \mapsto \left(a_2, \ldots, a_n, \ldots\right)$ - היא על ולא חד־חד־ערכית.

2 סדרות מדוייקות

הגדרה 2.1 יהיו M,M_1,M_2 מודולים מעל R, ותהי $0\to M_1\to M\to M_2\to 0$ סדרה קצרה מדוייקת. נאמר שהיא מתפצלת אם קיימת $\varphi:M\to M_1\oplus M_2$ איזומורפיזם כך שהדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} 0\to M_1\to & M & \to M_2\to 0 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0\to M_1\to & M_1\oplus M_2 & \to M_2\to 0 \end{array}$$

המעבר באמצע הוא על ידי φ כמובן, המעברים האחרים באמצע הם זהות.

דוגמא סדרה לא מתפצלת - יהי p ראשוני.

$$0\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to 0$$

משפט השאריות הסיני מבטיח כי זו לא סדרה מתפצלת.

תרגיל תהי $0\to M_1\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi}M_2\to 0$ סדרה קצרה מדוייקת. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. הסדרה מתפצלת.
2. קיים הומומורפיזם $\alpha:M\to M_1$ המקיים $\alpha\circ i=\mathrm{Id}_{M_1}$.
3. קיים הומומורפיזם $\beta:M_2\to M$ המקיים $\pi\circ\beta=\mathrm{Id}_{M_2}$.

תרגיל $2,3\Leftarrow 1$ קל - מגדירים $\alpha(m_1,m_2)=m_1,\beta(m_2)=(0,m_2)$.
כעת נראה $1\Leftarrow 2$, והכיוון הנותר דומה ונשאר כתרגיל בית. נגדיר הומומורפיזם

$$\begin{array}{rcl} \varphi:M & \to & M_1\oplus M_2 \\ \varphi(m) & = & (\alpha(m),\pi(m)) \end{array}$$

נבדוק שהכל מתחלף:

$$\begin{array}{rcl} m_1\xrightarrow{i}i(m_1)\xrightarrow{\varphi}(\alpha i(m_1),\pi i(m_1)) & = & (m_1,0) \\ m\xrightarrow{\varphi}(\alpha(m),\pi(m))\xrightarrow{\pi}\pi(m) & & \end{array}$$

נוכיח כי φ חד־חד־ערכי ועל. נראה חד חד ערכיות, על המתרגל לא מצליח כרגע.

$$0=\varphi(m)=(\alpha(m),\pi(m))=(0,0)$$

כעת $\pi(m)=0$, ולכן $i(m_1)=m=0$, אבל $0=\alpha(i(m_1))=m_1$, ולכן φ חד־חד־ערכית.

תרגיל יהיו M_1, M_2 מודולים מעל R. הוכיחו כי M_1, M_2 נוצרים סופית אם ורק אם $M = M_1 \oplus M_2$ נוצר סופית.

פתרון אם M_1, M_2 נוצרים סופית על ידי $m_1, \ldots, m_n, m'_1, \ldots m'_k$, אזי M נוצר על ידי כל אלה.
אם M נוצר סופית, הרי ההטלה לכל קואורדינטה היא על, ולכן M_1, M_2 נוצרים סופית.

הערה 2.2 אם $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ סדרה קצרה מדוייקת, אז אם M_1, M_2 נוצרים סופית, גם M. אבל אם M נוצר סופית אזי M_2 נוצר סופית, אבל M_1 לאו דווקא.

דוגמא תת מודול לא נוצר סופית של מודול נוצר סופית. יהי $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$. נגדיר $\sigma = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. אזי R נוצר סופית מעל עצמו, וכנ"ל $\mathbb{K}$, אבל σ לא, ועדיין יש סדרה קצרה מדוייקת:

$$0 \to \sigma \to R \to \mathbb{K} \to 0$$

תרגיל יהי M מודול נוצר סופית מעל R. יהי $\varphi : M \to R^n$ אפימורפיזם. הוכיחו כי $\ker \varphi$ נוצר סופית.

פתרון נגדיר e_i להיות "בסיס סטדנרטי" של R^n (1 במקום i ואפס בכל מקום אחר). יהי m_i לכל $1 \leq i \leq n$ כך שמתקיים $\varphi(m_i) = e_i$. נגדיר

$$\beta : R^n \to M$$

על ידי $\beta(e_i) = m_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. זה הומומורפיזם כי R^n מודול חופשי. לכן

$$0 \to \ker \varphi \to M \to R^n \to 0$$

מתפצלת, ולכן $M \cong \ker \varphi \oplus R^n$. לכן $\ker \varphi$ נוצר סופית.