אלגברה ב3

ⓒ ארזים

10 בנובמבר 2016

תרגיל יהי $m \in \mathbb{Z}$. חשבו את $\sqrt{(m)}$.

פתרון נכתוב

$$m = \pm p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$$

נרצה להראות כי

$$\sqrt{(m)} = (p_1) \dots (p_n)$$

נראה זאת בשתי דרכים.
בדרך הראשונה, $x \in \sqrt{(m)}$ אם ורק אם קיים N עבורו $x^N \in (m)$. כלומר $m \mid x^N$, ולכן $p_i \mid x^N$, ומשום שהם ראשוניים מתקיים $p_i \mid x$, כלומר $x \in (p_1) \dots (p_n)$. לכן יש לנו הכלה בכיוון אחד.
בכיוון השני, אם $x \in (p_1) \dots (p_n)$, אזי $x^{\max\{r_i\}} \in (m)$, ולכן $x \in \sqrt{(m)}$, וקיבלנו את ההכלה בכיוון השני.
כעת, עבור הדרך השנייה, נכתוב

$$\begin{aligned}
(m) &= (p_1^{r_1}) \dots (p_n^{r_n}) \\
\sqrt{(m)} &= \sqrt{(p_1^{r_1}) \dots (p_n^{r_n})} = \sqrt{(p_1)^{r_1}} \dots \sqrt{(p_n)^{r_n}} = \sqrt{(p_1)^{r_1}} \cap \dots \cap \sqrt{(p_n)^{r_n}} = \\
&= (p_1) \cap \dots \cap (p_n) = (p_1) \dots (p_n)
\end{aligned}$$

תרגיל (תכונה אוניברסלית של חוג הפולינומים) יהיו K, A חוגים, ויהי $i : K \to A$ הומומורפיזם. נגדיר

$$R = K[x_1, \dots, x_n]$$

יהיו $a_1, \dots, a_n$. הוכיחו כי קיים ויחיד הומומורפיזם

$$\varphi = ev_{\{a_1, \dots, a_n\}} : R \to A$$

כך שמתקיים:

1.

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= i(k) \\ \varphi(x_i) &= a_i \end{aligned}$$

2. נניח כי $K = \mathbb{K}$ שדה, $A = K$, $i = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$. אזי

$$m = \ker \varphi \triangleleft R$$

הוא אידאל מקסימלי

הערה 0.1 אם $\mathbb{K}$ סגור אלגברית, אז אלה כל האידאלים המקסימליים של R - משפט זה נקרא משפט האפסים של הילברט.

3. נניח כי $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ בסיטואציה של סעיף 2. מצאו אידאל מקסימלי שלא מהצורה של סעיף 2.

פתרון

1. נגדיר

$$\varphi\left(\sum k_{r_1,\ldots,r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}\right) = \sum i\left(k_{r_1,\ldots,r_n}\right) a_1^{r_1} \ldots a_n^{r_n}$$

2. ממשפט האיזומורפיזם הראשון,

$$R/m \cong \mathbb{K}$$

ולכן m מקסימלי.

3. נשים לב כי

$$\mathbb{R}[x] \big/ \left(x^2+1\right) \cong \mathbb{C}$$

לכן זהו אידאל מקסימלי שאינו מהצורה של סעיף 2.

תרגיל יהי R חוג, נסמן בתור $R[[x]]$ חוג הטורים הפורמליים עם מקדמים מתוך R.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \\ f+g &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \\ f \cdot g &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k \end{aligned}$$

זהו חוג קומוטטיבי. האם $1-x$ הפיך בחוג $R[[x]]$?

פתרון כן.

$$(1-x)\left(1+x+\ldots+x^{n}+\ldots\right)=1$$

תרגיל יהי K חוג, ויהי $R=K\left[x\right]$. יהי $f=a_{0}+\ldots+a_{n}x^{n}$.

1. $f\in\mathcal{N}\left(R\right)$ אם ורק אם $a_{0},\ldots,a_{n}\in\mathcal{N}\left(K\right)$.
2. $f\in R^{\times}$ אם ורק אם $a_{0}\in K^{\times}$ וכן $a_{1},\ldots,a_{n}\in\mathcal{N}\left(K\right)$.
3. הוכיחו כי $\mathcal{N}\left(R\right)=J\left(R\right)$.

פתרון

1. נניח כי $a_{0},\ldots,a_{n}$ נילפוטנטיים, ואז $a_{0},a_{1}x,\ldots,a_{n}x^{n}$ נילפוטנטיים. לכן f נילפוטנטי כסכום של נילפוטנטי.
נניח כי f נילפוטנטי. יהי n עבורו $f^{n}=0$. המקדם החופשי של f^{n} הוא a_{0}^{n}, ולכן a_{0} נילפוטנטי. כעת נתובנן בפולינום $f_{1}=f-a_{0}$, ונמשיך באינדוקציה, ונקבל את הטענה.
2. אם a_{0} הפיך וכן $a_{1},\ldots,a_{n}$ נילפוטנטיים. אזי $a_{1}x+\ldots+a_{n}x^{n}$ נילפוטנטי, a_{0} הפיך גם בתוך R, ואז f הוא סכום של נילפוטנטי והפיך - כלומר הפיך.
אם f הפיך, קיים $g=b_{0}+b_{1}x+\ldots+b_{n}x^{n}$ עבורו $fg=1$. האיבר החופשי הוא $a_{0}b_{0}$, ולכן a_{0} הפיך. המשך ההוכחה - המתרגל לא הצליח להוכיח בכיתה, התחייב לחזור עם הוכחה, בינתיים מניחים שזה נכון.
3. ידוע כי $\mathcal{N}\left(R\right)\subseteq J\left(R\right)$. יהי $f\in J\left(R\right)$. כעת, לכל $g\in R$, $1-fg$ הפיך. נבחר $g=x$, ונקבל כי $1-fx$ הפיך. לכן fx נילפוטנטי, ולכן, מסעיף 1, מקדמיו כולם נילפוטנטיים - אבל מקדמיו הם בדיוק מקדמיו של f, ולכן גם הוא נילפוטנטי. כך הוכחנו את הכיוון השני.

תרגיל יהי R חוג, $x\in R$. הוכיחו כי:

1. $x\in R^{\times}$ אם ורק אם לכל $\varphi:R\to\mathbb{K}$ הומומורפיזם, באשר $\mathbb{K}$ שדה כלשהו, מתקיים $\varphi\left(x\right)\neq0$.
2. $x\in\sqrt{0}$ אם ורק אם לכל $\varphi:R\to\mathbb{K}$ הומומורפיזם, באשר $\mathbb{K}$ שדה כלשהו, מתקיים $\varphi\left(x\right)=0$.

פתרון

1. אם x הפיך, $\varphi:R\to\mathbb{K}$ הומומורפיזם, $\mathbb{K}$ שדה, אזי $0\neq\varphi\left(x\right)\in\mathbb{K}^{X}$.
אם x לא הפיך, אזי קיים אידאל מקסימלי m המכיל את x, ואז $\pi:R\to R/m$ מקיים $\pi\left(x\right)=0$.
2. נשאר כתרגיל מפאת קוצר הזמן.