אלגברה ב3

ⓒ ארזים

3 בנובמבר 2016

תרגיל יהי $R=\mathbb{C}[x,y]$. יהיו $J=(x)\lhd R, I=\left(y^2-x^3-x^2\right)\lhd R$. הוכיחו כי $I+J$ אינו אידאל ראשוני (נעיר כי I,J כן אידאלים ראשוניים - R הוא תחום פריקות יחידה, ולכן אידאל ראשוני שנוצר על ידי איבר אי פריק הוא ראשוני).

פתרון $I+J$ הוא האידאלי המינימלי שמכיל גם את I וגם את J. כיוון ששניהם נוצרים על ידי פולינומים, הסכום הוא האידאל שנוצר על ידי שני הפולינומים:

$$\begin{aligned} I+J &= \left(x,y^2-x^3-x^2\right)=\left(x,y^2\right) \\ y &\notin I+J \\ y^2 &= y\cdot y\in I+J \end{aligned}$$

כמו כן, פתרון שונה (אך דומה) הוא

$$R/\left(I+J\right)=R/\left(x,y^2\right)=\mathbb{C}[x,y]/\left(x,y^2\right)\cong\left(\mathbb{C}[x,y]/(x)\right)/\left(\left(x,y^2\right)/(x)\right)\cong\mathbb{C}[y]/\left(y^2\right)$$

וכעת קל לבדוק כי חוג המנה שהתקבל אינו תחום שלמות, ולכן $I+J$ אינו ראשוני.

תרגיל
1. הראו שכל תחום שלמות סופי הוא שדה.
2. יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי ויהי $0\neq p\lhd\mathbb{F}[x]$ אידאל ראשוני. הראו כי p מקסימלי.

פתרון
1. יהי K תחום שלמות סופי. יהי $0\neq a\in K$. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} l_a:K &\to K \\ l_a(k) &= ak \end{aligned}$$

כיוון שנתון כי k תחום ידוע לנו כי l_a חד־חד־ערכית, ולכן מעיקרון שובך היונים l_a על. לכן קיים $b\in K$ כל שמתקיים $ab=l_a(b)=1$, ולכן a הפיך.

2. נשים לב כי קיימים הומומורפיזמים $\mathbb{F}\hookrightarrow\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]/p$. לכן $\mathbb{F}[x]/p$ מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהי $0\neq f\in p$ בעל דרגה מקסימלית, $\deg(f)=n$. אזי $\left\{\overline{1},\overline{x},\ldots,\overline{x^{n-1}}\right\}$ היא קבוצה פורשת, ולכן $\mathbb{F}[x]/p$ מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל שדה סופי, ולכן סופי. כמו כן הוא תחום שלמות, שכן p ראשוני. לכן קיבלנו תחום שלמות סופי, שמסעיף 1 הוא שדה. לכן $\mathbb{F}[x]/p$ שדה, ולכן p אידאל מקסימלי.

תמונה הפוכה של אידאל תחת הומומורפיזם יהי $\varphi : R' \to R$ הומומורפיזם של חוגים. יהי $I \triangleleft R$. נגדיר

$$R' \triangleright \varphi^{-1}(I) = \{r' \in R' \mid \varphi(r') \in I\}$$

בצורה שקולה, נגדיר

$$\pi' : R' \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\pi} R/I$$

ואז

$$\varphi^{-1}(I) = \ker \pi'$$

תרגיל

1. הראו שתמונה הפוכה של אידאל ראשוני היא אידאל ראשוני.
2. הראו שתמונה הפוכה של אידאל מקסימלי היא לאו דווקא אידאל מקסימלי.
3. הראו שתמונה הפוכה של אידאל מקסימלי תחת אפימורפיזם היא אידאל מקסימלי.

פתרון

1. יהי $\varphi : R' \to R$ הומומורפיזם, ויהי $p \triangleleft R$ ראשוני. נתבונן בהומומורפיזם הקנוני
$$\pi' : R'/\varphi^{-1}(p) \to R/p$$
הומומורפיזם זה הוא חד־חד־ערכי, וכן R/p הוא תחום שלמות, ולכן $R'/\varphi^{-1}(p)$ גם תחום שלמות. לכן $\varphi^{-1}(p)$ הוא אידאל ראשוני.
2. יהי $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ השיכון, אזי $i^{-1}(0) = (0) = 0$. (0) כן מקסימלי בתוך $\mathbb{Q}$, אבל לא מקסימלי בתוך $\mathbb{Z}$.
3. נניח כי φ היא על. אזי π' שהגדרנו בסעיף 1 היא על, בנוסף לכך שהיא חד־חד־ערכית. לכן אם R/p שדה אזי גם $R'/\varphi^{-1}(p)$ שדה, ולכן $\varphi^{-1}(p)$ אידאל מקסימלי.

תמונה ישרה של אידאל תחת הומומורפיזם יהי $\varphi : R' \to R$, $I' \triangleleft R'$. נגדיר

$$\varphi_*(I') = \{r_1\varphi(i'_1) + \cdots + r_n\varphi(i'_n) \mid r_1, \ldots, r_n \in R, i'_1, \ldots, i'_n \in I'\}$$

וזה אידאל (האידאל הקטן ביותר שמכיל את התמונה של I').

תרגיל יהי $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ השיכון. הראו כי $i_*((5)) \triangleleft \mathbb{Z}[i]$ אינו ראשוני, וחשבו את המנה.

פתרון $(2-i)(2+i)=(5)$, $\left|\mathbb{Z}[i]/i_*((5))\right|=25$. כמו כן, $(i-2)=\mathbb{Z}[i]=(2+i)+(2-i)$:

$$(-1)(2+i)+(1+i)(2-i)=1$$

לכן נקבל כי

$$\mathbb{Z}[i]/i_*((5))\cong\mathbb{Z}[i]\big/(2-i)\times\mathbb{Z}[i]\big/(2+i)$$

וזה לא תחום שלמות, לכן $i_*((5))$ אינו ראשוני.