אלגברה ב3

ארזים ©

1 בדצמבר 2016

1 מודולים שטוחים

דוגמאות

1. $\mathbb{Z}_2$ אינו שטוח מעל $\mathbb{Z}$: נתבונן בהומומורפיזם $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ המוגדר $f(m)=2m$. זהו בבירור מונומורפיזם, אבל ההעתקה $f\otimes 1_{\mathbb{Z}_2}$ אינה מונומורפיזם:

$$\left(f\otimes 1_{\mathbb{Z}_2}\right)(m\otimes u)=f(m)\otimes u=2m\otimes u=m\otimes 2u=m\otimes 0=0$$

כמובן שזה עובד לכל $\mathbb{Z}_n$, עם $f(m)=mn$.

2. יהי R חוג. אזי R^n היא מודול שטוח מעל R. נבדוק: לכל מודול M מעל R, נקבל

$$M\otimes_R R^n\cong M^n$$

האיזומורפיזם הוא

$$(v\otimes(r_1,\ldots,r_n))\mapsto(r_1v,\ldots,r_nv)$$

כעת נניח כי $f:M\to N$ הוא הומומורפיזם של מודולים מעל R, ונניח כי הוא חד חד ערכי. אזי

$$\begin{aligned}f\otimes 1_{R^n}:M\otimes_R R^n &\to N\otimes_R R^n\\ (m_1,\ldots,m_n) &\mapsto (f(m_1),\ldots,f(m_n))\end{aligned}$$

ובבירור זוהי העתקה חד־חד־ערכית, כי f חד־חד־ערכי. לכן R^n אכן שטוח מעל R.

טענה 1.1 יהי $f:A\to B$ הומומורפיזם של חוגים. יהי M מודול שטוח מעל A. יהי $M_B=B\otimes_A M$ מודול הרחבת הסקלרים של M מהחוג A לחוג B. אזי M_B שטוח מעל R.

הוכחה: נניח כי $i : U \to V$ הומומורפיזם חד־חד־ערכי של מודולים מעל B. כעת,

$$\begin{aligned} U \otimes_B M_B &= U \otimes_B (B \otimes_A M) \cong (U \otimes_B B) \otimes_A M \cong \\ &\cong U \otimes_A M \\ u \otimes (b \otimes m) &\mapsto (u \otimes b) \otimes m \mapsto bu \otimes m \end{aligned}$$

כעת יש

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_B M_B & \xrightarrow{i \otimes 1_{M_B}} & V \otimes_B M_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \otimes_A M & \xrightarrow[i \otimes 1_M]{} & V \otimes_A M \end{array}$$

כאשר המעבר כלפי מטה נעשה על ידי

$$i(u) \otimes (b \otimes m) \mapsto bi(u) \otimes m = i(bu) \otimes m$$

כעת, כיוון שמתקיים $i \otimes 1_M$ חד־חד־ערכי, והדיאגרמה כמובן קומוטטיבית, גם $i \otimes 1_{M_B}$.
לכן M_B הוא אכן מודול שטח מעל B. ■

2 אלגבראות

הגדרה 2.1 יהי חוג R. חוג A ייקרא <u>אלגברה</u> מעל R אם A גם מודול מעל R, כך שמתקיים

$$r \cdot (ab) = (r \cdot a) b = a (r \cdot b)$$

לכל $a, b \in A$, $r \in R$.

נניח כי A אלגברה מעל R. נגדיר

$$\begin{aligned} f : R &\to A \\ f(r) &= r \cdot 1_A \end{aligned}$$

אזי f הוא כמובן הומומורפיזם של חוגים:

$$f(rs) = rs \cdot 1_A = r \cdot (s \cdot 1_A) = r \cdot ((s \cdot 1_A) \cdot 1_A) = r \cdot (1_A (s \cdot 1_A)) = (r \cdot 1_A)(s \cdot 1_A) = f(r) f(s)$$

f קובע למעשה את מבנה המודול של A מעל R(כלומר הכפל בסקלר נקבע דרך f -
לכל $r \in R, a \in A$ מתקיים $r \cdot a = (r \cdot 1_A) a = f(r) a$).
למעשה, A מודול מעל R כצמצום סקלרים דרך ההומומורפיזם f.

2.1 הומומורפיזם של אלגבראות

הגדרה 2.2 יהיו A, B שתי אלגבראות מעל החוג R. פונקציה $\varphi : A \to B$ נקראת הומומורפיזם של אלגבראות מעל R אם φ היא הומומורפיזם של חוגים, וכן הומומורפיזם של מודולים מעל R.

נניח כי $\varphi : A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. נתבונן בהומומורפיזם הבאים (של חוגים):

$$f : R \to A, g : R \to B$$

כך שמתקיים

$$\begin{aligned} r \cdot a &= f(r)\, a \\ r \cdot b &= g(r)\, b \end{aligned}$$

לכל $a \in A, b \in B, r \in R$. כעת, φ הוא הומומורפיזם של מודולים מעל R אם ורק אם

$$\varphi(r \cdot a) = r \cdot \varphi(a)$$

לכל $r \in R, a \in A$. כלומר,

$$\varphi(f(r)\, a) = g(r)\, \varphi(a)$$

נציב $a = 1_A$ ונקבל

$$\varphi \circ f = g$$

לחילופין, אם הקשר $\varphi \circ f = g$ מתקיים, נראה כי φ הוא הומומורפיזם של מודולים. אזי למעשה

$$\varphi(r \cdot a) = \varphi(f(r)\, a) = \varphi(f(r))\, \varphi(a) = g(r)\, \varphi(a) = r \cdot \varphi(a)$$

דוגמאות

1. כל חוג R הוא אלגברה מעל $\mathbb{Z}$. מבנה המודול הוא

$$n \cdot r = \begin{cases} r + (n-1)\, r & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ -(-n)\, r & n \leq -1 \end{cases}$$

2. $R[x_1, \ldots, x_n]$ אלגברה מעל R.

2.2 אלגברה נוצרת סופית

הגדרה 2.3 אלגברה A מעל חוג R נקראת נוצרת סופית אם אם קיימים $\{a_1,\dots a_n\}\subseteq A$ כך שלכל $a\in A$ קיים ביטוי פולינומיאלי באיברים $a_1,\dots,a_n$ עם מקדמים בחוג R:

$$\sum_{i_1,\dots,i_n\geq 0} r_{i_1\dots i_n}\cdot a_1^{i_1}\dots a_n^{i_n}$$

הסכום כמובן סופי.

אם $f:R\to A$ הוא ההומומורפיזם עבורו $f(r)=r\cdot 1_A$, אז A תמונה הומומורפית על ידי

$$\begin{aligned} R[x_1,\dots,x_n] &\longrightarrow A \\ \sum r_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} &\longmapsto \sum f(r_{i_1\dots i_n})\cdot x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

2.3 מכפלה טנזורית של אלגבראות

תהיינה A,B אלגבראות מעל R. נגדיר

$$D=A\otimes_R B$$

כמודול מעל R. נרצה להגדיר על D מבנה של אלגברה מעל R. לשכם כך נתבונן בפונקציה

$$\begin{aligned} A\times B\times A\times B &\to D \\ (a,b,a',b') &\mapsto (aa')\otimes(bb') \end{aligned}$$

זאת פונקציה מולטילינארית מעל R, שמגדירה הומומורפיזם יחיד של מודולים

$$\begin{aligned} m: A\otimes_R B\otimes_R A\otimes_R B &\to D \\ m(a\otimes b\otimes a'\otimes b') &\to (aa')\otimes(bb') \end{aligned}$$

והרי ידוע כי יש איזומורפיזם יחיד

$$A\otimes_R B\otimes_R A\otimes_R A\cong (A\otimes_R B)\otimes_R (A\otimes_R B)=D\otimes_R D$$

על ידי הרכבה עם האיזומורפיזם, נראה את m כהומומורפיזם

$$\begin{aligned} m: D\otimes_R D &\to D \\ m((a\otimes b)\otimes(a'\otimes b')) &= aa'\otimes bb' \end{aligned}$$

m מגדיר את התבנית הבי־לינארית

$$\mu : D \times D \to D$$
$$\mu\left(a \otimes b, a' \otimes b'\right) = aa' \otimes bb'$$

קל לראות כי μ מגדירה פעולת כפל על D שהופכת את D לחוג.

$$\mu\left(\sum_i a_i \otimes b_i, \sum_j a'_j \otimes b'_j\right) = \sum_{i,j} a_i a'_j \otimes b_i b'_j$$

כמובן, איבר היחידה הוא $1_A \otimes 1_B$. מעתה, נסמן

$$\mu\left(d_1, d_2\right) = d_1 \cdot d_2$$

לכל $d_1, d_2 \in D$. בסך הכל, קיבלנו את D כאלגברה מעל R, על ידי

$$r \cdot (a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$$

לכל $r \in R, a \in A, b \in B$. ההומומרפיזם שנותן את מבנה המודול הוא

$$h\left(r\right) = r \cdot 1_D = r \cdot \left(1_A \otimes 1_B\right) = r \cdot 1_A \otimes 1_B = 1_A \otimes r \cdot 1_B$$

נקרא להומומורפיזמים שמגדירים את מבני המודולים

$$f\left(r\right) = r \cdot 1_A, g\left(r\right) = r \cdot 1_B$$

ואז נקבל

$$h\left(r\right) = f\left(r\right) \otimes 1_B = 1_A \otimes g\left(r\right)$$

יש לנו גם הומומורפיזמים

$$A \ni a \mapsto a \otimes 1_B \in D$$
$$B \ni b \mapsto 1_A \otimes b \in D$$

אלה למעשה הומומורפיזמים של חוגים וגם של מודולים, כלומר הומומורפיזמים של אלגבראות.

3 חוגי מנה ומודולי מנה

3.1 בנייה ותכונה אוניברסאלית

הגדרה 3.1 יהי R חוג. נאמר כי תת קבוצה $S \subseteq R$ היא כפלית אם $1 \in S$ וכן לכל $r, s \in S$ מתקיים $rs \in S$.

דוגמאות

1. נניח כי R תחום שלמות, וניקח $S = R \backslash \{0\}$.
2. נניח כי $R \subsetneq P$ אידאל ראשוני. אזי $S = R \backslash P$ היא כפלית.
3. נניח כי $0 \neq a \in R$. אזי $S = \{a^n \mid n \geq 0\}$ כפלית.

כאשר $S \subseteq R$ כפלית, נגדיר על $R \times S$ את היחס הבא:

$$(a, t) \sim (b, s) \iff \exists v \in S. (as - bt) v = 0$$

טענה 3.2 זהו יחס שקילות.

הוכחה: רפלקסיביות וסימטריה ברורות מההגדרה. כעת, נניח כי

$$(a, t) \sim (b, s), (b, s) \sim (c, u)$$

אזי קיימים $v, w \in S$ כך שמתקיים

$$(as - bt) v = 0$$
$$(bu - cs) w = 0$$

נפתח סוגריים:

$$asv - btv = 0$$
$$buw - csw = 0$$

נכפיל את השוויון הראשון פי uw, ואת השני פי tv.

$$asvuw - btvuw = 0$$
$$buwtv - cswtv = 0$$

נחבר ונקבל

$$asvuw - cswtv = 0$$
$$(au - ct) svw = 0$$

וכמובן $svw \in S$ כי S כפלית. לכן מההגדרה $(a, t) \sim (c, u)$, והוכחנו טרנזיטיביות. ■

סימון נסמן את מחלקת השקילות של (a,t) בתור $\frac{a}{t}$. את קבוצת מחלקות השקילות נסמן

$$S^{-1}R$$

על $S^{-1}R$ נגדיר פעולות חיבור וכפל, כדי ליצור חוג.

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{s}=\frac{as+bt}{ts}$$
$$\frac{a}{t}\cdot\frac{b}{s}=\frac{ab}{ts}$$

יש להראות כמובן שאלה מוגדרים היטב. נניח כי $\frac{a}{t}=\frac{a'}{t'},\frac{b}{s}=\frac{b'}{s'}$. מההגדרה, יש עבורם $u,v\in S$

$$\left(at'-a't\right)u=0$$
$$\left(bs'-b's\right)v=0$$

נתבונן בהפרש

$$\begin{aligned}\left(as+bt\right)t's'-\left(a's'+b't'\right)ts &= ast's'+btt's'-a's'ts-b't'ts=\\ &=\left(at'-a't\right)ss'+\left(bs'-b's\right)tt'\end{aligned}$$

כאשר נכפיל פי uv נקבל 0, ולכן אכן יש שקילות, כי $uv\in S$ (S כפלית). לכן החיבור שהגדרנו אכן מוגדר היטב, כלומר

$$\frac{as+bt}{ts}=\frac{a's'+b't'}{t's'}$$

הבדיקה עבור הכפל קלה, דומה, ותישאר כתרגיל.
קל לבדוק אסוציאטיביות, דיטריבוטיביות. איבר האפס הוא $\frac{0}{1}$ - מתקיים

$$\frac{0}{1}+\frac{a}{t}=\frac{a}{t}$$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{a}{t}=\frac{0}{1}\iff\exists v\in s.av=0$$

בפרט, $\frac{0}{s}=\frac{0}{1}$ לכל $s\in S$. איבר היחידה הוא כמובן $\frac{1}{1}$ - מתקיים

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{s}=\frac{a}{s}$$

ונשים לב שמתקיים

$$\frac{a}{s}=\frac{1}{1} \iff \exists v\in S.\,(a-s)\,v=0$$

בפרט, לכל $s\in S$ מתקיים $\frac{s}{s}=\frac{1}{1}$. הנגדי של $\frac{a}{t}$ נתון על ידי $\frac{-a}{t}$, שכן

$$\frac{a}{t}+\frac{-a}{t}=\frac{at-at}{t^2}=\frac{0}{t^2}=\frac{0}{1}$$

נגדיר

$$f:R\to S^{-1}R$$
$$f\,(x)=\frac{x}{1}$$

קל לראות שזהו הומומורפיזם. לכל איבר $s\in S$, מתקיים כמובן שהאיבר $f\,(s)$ הפיך:

$$\frac{s}{1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{s}{s}=\frac{1}{1}$$

דוגמאות

1. כאשר R תחום שלמות, $S=R\backslash\{0\}$, אזי $S^{-1}R$ הוא שדה, ונקרא שדה המנות של R. לכל $a\in S,t\in S$ מתקיים

$$\frac{a}{t}\cdot\frac{t}{a}=\frac{1}{1}$$

כלומר $\frac{a}{t}$ הפיך. למעשה, לכל $a,t\in R$ כך שמתקיים $a,t\neq 0$, האיבר $\frac{a}{t}$ הפיך. כאן ההומומורפיזם $f\,(x)=\frac{x}{1}$ הוא חד חד ערכי, כי אין מחלקי אפס, ולכן כל איברי $S^{-1}R$ שאינם 0 הפיכים.
בפרט, ניקח את תחום השלמות $\mathbb{F}\,[x_1,\ldots,x_n]$ ($\mathbb{F}$ שדה), ושדה המנות נקרא שדה הפונקציות הרציונליות מעל $\mathbb{F}$ עבור n משתנים.

2. בחוג $R=\mathbb{Z}$, ניקח את האידאל הראשוני $p\mathbb{Z}$, עבור p ראשוני. ניקח $S=\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$. במצב זה נקבל $S^{-1}\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_p$, וזהו חוג מקומי (ראינו את הדוגמה הזו).