אלגברה ב3

ארזים ©

24 בנובמבר 2016

1 תזכורת

הגדרה 1.1 יהי $f: A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. יהי M מודול מעל A. נגדיר את $M_B = B \otimes_A M$ הרחבת הסקלרים מהחוג A לחוג B.

טענה 1.2 אם M מודול מעל A נוצר סופית, אזי M_B נוצר סופית מעל B.

הוכחה: בהמשך. ■

2 מכפלה טנזורית וסדרות מדוייקות

טענה 2.1 יהיו M, N, P מודולים מעל R. אזי קיים איזומורפיזם קנוני

$$T = T_{M,N,P} = \mathrm{Hom}_R (M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R (M, \mathrm{Hom}_R (N, P))$$

הוכחה: יהי $f \in \mathrm{Hom}_R (M \otimes_R N, P)$. נגדיר

$$T(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$$

ברור כי $T(f)$חיבורי, וכי לכל $r \in R$ מתקיים

$$T(rf) = rT(f)$$

לכן T הוא הומומורפיזם של מודולים מעל R.
נראה כי T חד־חד־ערכי. נניח כי

$$T(f) = 0 \iff T(f)(m)(n) = 0 \iff f(m \otimes n) = 0$$

כמובן, $M \otimes_R N$ נוצר על ידי האיברים $m \otimes n$, ולכן $f = 0$ - כלומר T חד־חד־ערכי.
נותר להראות שהוא על. יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}_R (M, \mathrm{Hom}_R (N, P))$. נגדיר

$$\begin{aligned} \xi : M \times N &\to P \\ \xi(m,n) &= \varphi(m)(n) \end{aligned}$$

ברור כי ξ בילינארית, ולכן קיים ויחיד הומומורפיזם $f : M \otimes_R N \to P$ כך שמתקיים $f(m \otimes n) = \xi(m,n)$, ואז

$$T(f) = \varphi$$

לכן סיימנו. ■

טענה 2.2 תהי $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ סדרה מדוייקת של מודולים מעל R. יהי N מודול מעל R. אזי

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M'' \to 0$$

היא סדרה מדוייקת.

הוכחה: נתבונן בסדרה

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'' \mathrm{Hom}_R(N,P)) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,P)) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Hom}_R(N,P))$$

שהיא מדוייקת (ראינו בעבר כי הפונקטור $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathrm{Hom}(N,P))$ שומר דיוק בצורה זו).
כעת,

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', \mathrm{Hom}_R(N,P)) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,P)) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Hom}_R(N,P)) \\ T_{M'',N,P} \uparrow & & T_{M,N,P} \uparrow & & \uparrow T_{M',N,P} \\ \mathrm{Hom}_R(M'' \otimes_R N, P) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathrm{Hom}_R(M' \otimes_R N, P) \end{array}$$

כאשר $\tilde{g} = T^{-1}_{M,N,P} g^* T_{M'',N,P}$, $\tilde{f} = T^{-1}_{M',N,P} f^* T_{M,N,P}$. כעת נקבל כי עבור $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M'' \otimes_R N, P)$, נקבל

$$\begin{array}{rcl} (T_{M'',N,P}\varphi)(m'')(n) & = & \varphi(m'' \otimes n) \\ (g^*(T_{M'',N,P}\varphi))(m)(n) & = & \varphi(g(m) \otimes n) \\ \left(T^{-1}_{M,N,P} g^* T_{M'',N,P}\varphi\right)(m \otimes n) & = & \varphi(g(m) \otimes n) = \\ & = & \varphi \circ (g \otimes_R 1_N)(m \otimes n) = \\ & = & (g \otimes_R 1_N)^*(\varphi)(m \otimes n) \\ T^{-1}_{M,N,P} g^* T_{M'',N,P} & = & (g \otimes 1_N)^* \end{array}$$

הסדרה התחתונה מדוייקת לכל P, ולכן גם הסדרה שבטענה מדוייקת. ■

נחזור כעת לטענה מתחיל השיעור, ונוכיח אותה.

הוכחה: יהי M מודול נוצר סופית מעל A. אזי

$$\begin{array}{ccc}
\ker\varphi \to & A^n & \xrightarrow{\varphi} M \to 0 \\
\ker\varphi \otimes_A B \to & B \otimes_A A^n & \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A M \to 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
??? \to & B^n & \to M_B \to 0
\end{array}$$

ולכן M_B נוצר סופית. ■

הגדרה 2.3 יהי N מודול מעל R כך שהפונקטור

$$M \longmapsto M \otimes_R N$$

שומר על דיוק של סדרות. נאמר כי המודול N הוא מודול <u>שטוח</u>.

טענה 2.4 התנאים הבאים שקולים.

1. N מודול שטוח מעל R.
2. $N \otimes_R \cdot$ מעביר סדרה קצרה מדוייקת לסדרה קצרה מדוייקת.
3. לכל $f : M' \to M$ מונומורפיזם ההומומורפיזם $f \otimes 1_N : M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ חד חד ערכי.
4. לכל $f : M' \to M$ מונומורפיזם בין מודולים נוצרים סופית, $f \otimes 1_N$ חד חד ערכי.

הוכחה: ברור כי $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$.
$1 \Rightarrow 2$: תהי

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \to \ldots \xrightarrow{f_n} M_n$$

סדרה מדוייקת. נוכיח שהטנזור שומר עליה. נתבונן בתת סדרה

$$M_{i-1} \to M_i \to M_{i+1}$$

נוכל להתבונן בתת סדרה הקצרה המדוייקת

$$0 \to \mathrm{Im} f_i \hookrightarrow M_i \xrightarrow{f_{i+1}} \mathrm{Im} f_{i+1} \to 0$$

מהנתון מותר לקחת טנזור:

$$0 \to \mathrm{Im} f_i \otimes_R N \hookrightarrow M_i \otimes_R N \xrightarrow{f_{i+1} \otimes 1_N} \mathrm{Im} f_{i+1} \otimes_R N \to 0$$

אזי מתקיים

$$\ker\left(f_{i+1}\otimes 1_N\right)=\operatorname{Im}\left(f_i\otimes 1_N\right)$$

ולכן בכל שלב, סדרת הטנזורים מדוייקת, ולכן כל הסדרה מדוייקת לאחר לקיחת טנזור.
$2\Rightarrow 3$: ידוע כבר כי טנזור הוא מדוייק מימין, והנתון מבטיח שהוא מדוייק גם משמאל - כלומר הוא מדוייק.
$3\Rightarrow 4$: נניח כי $f:M'\to M$ חד חד ערכי. נניח כי $W=\sum_i u_i'\otimes v_i\in\ker\left(f\otimes 1_N\right)$. כלומר מתקיים

$$\sum_i f\left(u_i'\right)\otimes v_i=0\in M\otimes N$$

יהי $M_0'\subseteq M'$ הנוצר על ידי $\{u_i'\}$. נסמן

$$w_0=\sum_i u_i'\otimes v_i\in M_0'\otimes N$$

ראינו בעבר כי יש $M_0\subseteq M$ נוצר סופית המכיל את $f\left(M_0'\right)$ כך שמתקיים

$$\sum_i f\left(u_i'\right)\otimes v_i=0\in M_0\otimes N$$

לכן, אם נגדיר $f_0=f\mid_{M_0'}:M_0'\to M_0$, היא תהיה חד חד ערכית, ונקבל

$$\left(f_0\otimes 1_N\right)\left(w_0\right)=0$$

אבל מההנחה $f_0\otimes 1_N$ חד חד ערכית, ולכן $w_0=0$ - כלומר f חד חד ערכית. ■