אלגברה ב3

ארזים ©

21 בנובמבר 2016

1 מכפלה טנזורית - המשך

טענה 1.1 יהיו M,N,P מודולים מעל R. אזי:

1. קיים איזומורפיזם יחיד

$$M\otimes_{R}N\xrightarrow{\sim}N\otimes_{R}M$$

כך שמתקיים

$$u\otimes v\to v\otimes u$$

2. קיימים איזומורפיזמים יחידים

$$(M\otimes_{R}N)\otimes_{R}P\xrightarrow{\sim}M\otimes_{R}(N\otimes_{R}P)\xrightarrow{\sim}M\otimes_{R}N\otimes_{R}P$$

כך שמתקיים

$$(u\otimes v)\otimes w\to u\otimes(v\otimes w)\to u\otimes v\otimes w$$

3. קיים איזומורפיזם יחיד

$$(M\oplus N)\otimes_{R}P\xrightarrow{\sim}M\otimes_{R}P\oplus N\otimes_{R}P$$

כך שמתקיים

$$(u+v)\otimes w\to u\otimes w+v\otimes w$$

4. קיים איזומורפיזם יחיד

$$R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M$$

כך שמתקיים

$$r \otimes v \to rv$$

הוכחה: נראה את סעיפים 2,3 ־ סעיפים 1,4 מוכיחים באותה צורה.
סעיף 2: נקבע $w \in P$. נגדיר פונקציה

$$f_w : M \times N \to M \otimes_R N \otimes_R P$$

לפי

$$f_w (u, v) = u \otimes v \otimes w$$

f_w בילינארית מעל R, ולכן מגדירה הומומורפיזם יחיד $f'_w : M \otimes_R N \to M \otimes_R N \otimes_R P$ כך שמתקיים

$$f'_w (u \otimes v) = f_w (u, v) = u \otimes v \otimes w$$

נגדיר כעת

$$\begin{aligned} \varphi : (M \otimes_R N) \times P &\to M \otimes_R N \otimes_R P \\ \varphi (\xi, w) &= f'_w (\xi) \end{aligned}$$

φ בילינארית מעל R, ולכן מגדירה הומומורפיזם יחיד $f : (M \otimes_R N) \otimes_R P \to M \otimes_R N \otimes_R P$ כך שמתקיים

$$f (\xi \otimes w) = \varphi (\xi, w)$$

f נקבע באופן יחיד על ידי

$$f ((u \otimes v) \otimes w) = \varphi (u \otimes v, w) = u \otimes v \otimes w$$

בכיוון ההפוך, נגדיר

$$\begin{aligned} \alpha : M \times N \times P &\to (M \otimes_R N) \otimes_R P \\ \alpha (u, v, w) &= (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$

ברור כי α טרילינארית מעל R, ולכן היא מגדירה הומומורפיזם יחיד

$$\begin{aligned}\alpha' : M \otimes_R N \otimes_R P &\to (M \otimes_R N) \otimes_R P \\ \alpha' (u \otimes v \otimes w) &= (u \otimes v) \otimes w\end{aligned}$$

וברור כי f, α' הופכיות. באותה צורה בדיוק מראים את האיזומורפיזם הנוסף שמבוקש בסעיף זה.

סעיף 3: נגדיר

$$\begin{aligned}f : (M \oplus N) \times P &\to M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P \\ f ((u+v), w) &= u \otimes w + v \otimes w\end{aligned}$$

f בילינארית מעל R, ולכן היא מגדירה הומומורפיזם יחיד $f' : (M \oplus N) \otimes_R P \to M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P$ כך שמתקיים

$$f' ((u+v) \otimes w) = u \otimes w + v \otimes w$$

כיוון שמתקיים

$$\begin{aligned}f' (u \otimes w) &= u \otimes w \\ f' (v \otimes w) &= v \otimes w\end{aligned}$$

ברור כי f' על. כעת נראה כי f' חד־חד־ערכית. נניח כי

$$f' \left(\sum (u_i + v_i) \otimes w_i \right) = 0$$

כלומר

$$\sum u_i \otimes w_i + \sum v_i \otimes w_i$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}\sum u_i \otimes w_i &= 0 \in M \otimes_R P \\ \sum v_i \otimes w_i &= 0 \in N \otimes_R P\end{aligned}$$

ניזכר בסימוני ההוכחה של קיום המכפלה הטנזורית - במודול $C_{M \otimes_R P}$, מתקיים $\sum (u_i, w_i) \in D_{M \otimes_R P}$, וכן במודול $C_{N \otimes_R P}$ מתקיים $\sum (v_i, w_i) \in D_{N \otimes_R P}$.

כעת ברור כי במודול $C_{(M \oplus N) \otimes_R P}$ מתקיים

$$D_{N \otimes_R P}, D_{M \otimes_R P} \subseteq D_{(M \oplus N) \otimes_R P}$$

לכן מתקיים

$$\sum u_i \otimes w_i, \sum v_i \otimes w_i = 0 \in (M \oplus N) \otimes_R P$$

ולכן

$$\sum u_i \otimes w_i + \sum v_i \otimes w_i = 0 \in (M \oplus N) \otimes_R P$$

■

נניח כי $f : M \to M', g : N \to N'$ הומומורפיזמים של מודולים מעל R. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} \varphi : M \times N &\to M' \otimes_R N' \\ \varphi (u,v) &= f(u) \otimes g(v) \end{aligned}$$

φ בילינארית מעל R, ולכן מגדירה הומומורפיזם יחיד, שנסמנו $f \otimes g$, כאשר

$$\begin{aligned} f \otimes g : M \otimes_R N &\to M' \otimes_R N' \\ (f \otimes g)(u \otimes v) &= f(u) \otimes g(v) \end{aligned}$$

אם $f' : M' \to M'', g' : N' \to N''$ הומומורפיזמים של מודולים מעל R, אזי ברור כי

$$(f \circ f') \otimes (g \circ g') = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) : M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N''$$

בפרט, אם f, g איזומורפיזמים אז גם $f \otimes g$ איזומורפיזם, כי נקח $f' = f^{-1}, g' = g^{-1}$, ואז

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = 1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes N}$$

דוגמא יהיו U, V מרחבים ווקטוריים מעל שדה $\mathbb{K}$. נבחר בסיסים מעל $\mathbb{K}$: $\{v_i\}_{i \in I}$ בסיס של V, $\{u_j\}_{j \in J}$ בסיס של U. אזי הקבוצה $\{v_i \otimes u_j \mid i \in I, j \in J\}$ היא בסיס של $V \otimes_{\mathbb{K}} U$.

אנו יודעים כי הם פורשים. יש להוכיח אי תלות, כלומר להראות שכל תת קבוצה $\{v_i \otimes u_j \mid i \in I_0, j \in J_0\}$, כאשר I_0, J_0 סופיות, היא בלתי תלוייה. נסמן

$$\begin{aligned} V_{I_0} &= \operatorname{span}\{v_i \mid i \in I_0\} \\ V_{I \setminus I_0} &= \operatorname{span}\{v_i \mid i \in I \setminus I_0\} \\ U_{J_0} &= \operatorname{span}\{u_j \mid j \in J_0\} \\ U_{J \setminus J_0} &= \operatorname{span}\{u_j \mid j \in J \setminus J_0\} \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$V \otimes_{\mathbb{K}} U = \left(V_{I_0} \oplus V_{I \setminus I_0}\right) \otimes_{\mathbb{K}} \left(U_{J_0} \oplus U_{J \setminus J_0}\right) \cong V_{I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J_0} \oplus V_{I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J \setminus J_0} \oplus V_{I \setminus I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J_0} \oplus V_{I \setminus I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J \setminus J_0}$$

נניח כי מתקיים

$$\sum_{\substack{i\in I_0\\ j\in J_0}} x_{i,j}\left(v_i\otimes u_j\right)=0\in V\otimes_{\mathbb{K}}U$$

מהפירוק שראינו לסכום ישר נקבל

$$\sum x_{i,j}\left(u_i\otimes v_j\right)=0\in V_{I_0}\otimes_{\mathbb{K}}U_{J_0}$$

כעת נכתוב

$$\begin{aligned}
V_{I_0} &= \bigotimes_{i\in I_0}\mathbb{K}v_i\\
U_{J_0} &= \bigotimes_{j\in J_0}\mathbb{K}u_j\\
V_{I_0}\otimes_{\mathbb{K}}U_{J_0} &= \bigoplus_{\substack{i\in I_0\\ j\in J_0}}\mathbb{K}v_i\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}u_j=\bigoplus_{\substack{i\in I_0\\ j\in J_0}}\mathbb{K}\left(v_i\otimes u_j\right)
\end{aligned}$$

ולכן נקבל $x_{i,j}=0$ לכל $i\in I_0, j\in J_0$. בפרט, אם המימדים של U,V סופיים, אזי המימד של $U\otimes_{\mathbb{K}}V$ הוא מכפלת המימדים.
נניח כי $T:V\to V', S:u\to U'$ העתקות לינאריות של מרחבים ווקטוריים מעל $\mathbb{K}$. ראינו את ההעתקה

$$\begin{aligned}
T\otimes S:V\otimes_{\mathbb{K}}U &\to V'\otimes_{\mathbb{K}}U'\\
\left(T\otimes S\right)\left(v_i\otimes u_j\right) &= T\left(v_i\right)\otimes S\left(u_j\right)
\end{aligned}$$

ניקח בסיסים:

$$B_V=\{v_i\}\subseteq V, B_{V'}=\{v_i'\}\subseteq V', B_U=\{u_j\}\subseteq U, B_{U'}=\left\{u_j'\right\}\subseteq U'$$

כעת נסמן

$$\begin{aligned}
[T]_{B_{V'}}^{B_V} &= \left(a_{ij}\right)=A\\
[S]_{B_{U'}}^{B_U} &= \left(b_{\alpha\beta}\right)=B
\end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$
\begin{aligned}
T\left(v_j\right) &= \sum_i a_{ij} v_i' \\
S\left(u_\beta\right) &= \sum_\alpha b_{\alpha\beta} u_\alpha' \\
\left(T \otimes S\right)\left(v_j \otimes u_\beta\right) &= T\left(v_j\right) \otimes S\left(u_\beta\right) = \left(\sum a_{ij} v_i'\right) \otimes \left(\sum b_{\alpha\beta} u_\alpha'\right) \\
&= \sum_{i,\alpha} a_{ij} b_{\alpha\beta} \left(v_i' \otimes u_\alpha'\right)
\end{aligned}
$$

לכן למעשה מתקיים

$$
[T \otimes S]_{B_{V'} \otimes B_{U'}}^{B_V \otimes B_U} = \left(a_{ij} b_{\alpha\beta}\right)
$$

לפי סדר כלשהו שנבחר על איברי הבסיס. לדוגמא לפי הסדר

$$
\begin{aligned}
B_V \otimes B_U &: v_1 \otimes B_U, v_2 \otimes B_U, \ldots \\
B_{V'} \otimes B_{U'} &: v_1' \otimes B_{U'}, v_2' \otimes B_{U'}, \ldots
\end{aligned}
$$

ואז נקבל

$$
[T \otimes S]_{B_{V'} \otimes B_{U'}}^{B_V \otimes B_U} = \begin{pmatrix} a_{11} B & a_{12} B & \ldots \\ a_{21} B & a_{22} B & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

2 צמצום סקלרים והרחבת סקלרים

נתון הומומורפיזם של חוגים $f : A \to B$. נתון מודול M מעל B. באמצעות f ניתן להגדיר על M מבנה של מודול מעל A: לכל $a \in A, v \in M$ נגדיר

$$
av \coloneqq f\left(a\right) v
$$

זה נותן מבנה על M של מודול מעל A, למשל:

$$
\left(a_1 a_2\right) v = f\left(a_1 a_2\right) v = \left(f\left(a_1\right) f\left(a_2\right)\right) v = f\left(a_1\right) \left(f\left(a_2\right) v\right) = a_1 \left(a_2 v\right)
$$

המודול שמתקבל מעל A נקרא המודול המתקבל מתוך M על ידי סקלרים לתוך A.

מקרה פרטי $M=B$. אפשר לחשוב על B בתור מודול מעל A, לפי

$$a\cdot b:=f(a)\,b$$

טענה 2.1 נתון $f:A\to B$ הומומורפיזם של חוגים. נניח כי M מודול נוצר סופית מעל B, ונניח כי B נוצר סופית כמודול מעל A. אזי M נוצר סופית מעל A.

הוכחה: נכתוב

$$\begin{aligned} M &= Bv_1+\cdots+Bv_k \\ B &= Ab_1+\cdots+Ab_n \end{aligned}$$

ונקבל

$$M=\sum_{i,j=1}^{n,k}(Ab_i)\,v_j=\sum_{i,j=1}^{n,k}A\,(b_iv_j)$$

■

כעת, נתון $f:A\to B$ הומומורפיזם של חוגים. נראה את B כמודול מעל A. יהי M מודול מעל A, ונגדיר

$$M_B=B\otimes_A M$$

זהו מודול מעל A.
יהי $b\in B$. נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned} f_b:B\times M &\to B\otimes_A M \\ f_b(b',v) &= bb'\otimes v \end{aligned}$$

זו כמובן העתקה בילינארית מעל A. לכן יש הומומורפיזם יחיד של מודולים מעל A

$$\begin{aligned} f_b':B\otimes_A M &\to B\otimes_A M \\ f_b'(b'\otimes v) &= bb'\otimes v \end{aligned}$$

נגדיר עבור $b\in B$, $\xi\in M_B=B\otimes_A M$ את

$$b\cdot\xi=f_b'(\xi)$$

זה נותן מבנה של מודול מעל B. נראה למשל

$$\begin{aligned} (b_1+b_2)\,\xi &= b_1\xi+b_2\xi \\ f_{b_1+b_2}'(\xi) &= f_{b_1}'(\xi)+f_{b_2}'(\xi) \end{aligned}$$

מספיק להראות עבור $\xi = b' \otimes v$ יוצר.

$$\begin{aligned} f'_{b_1+b_2}\left(b' \otimes v\right) &= \left(b_1+b_2\right) b' \otimes v = \left(b_1 b' + b_2 b\right) \otimes v = b_1 b' \otimes v + b_2 b' \otimes v = \\ &= f'_{b_1}\left(b' \otimes v\right) + f'_{b_2}\left(b' \otimes v\right) \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

דוגמא יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נתובנן במרחב

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

זה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. אם $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{R}$ אזי $\{1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n\}$ בסיס של $V_{\mathbb{C}}$.

בכיוון השני, אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, אזי V מרחב וקטורי גם מעל $\mathbb{R}$. אם $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{C}$, אזי $\{v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{R}$.