אלגברה ב3

ⓒ ארזים

17 בנובמבר 2016

היינו באמצע הוכחת הקיום של המכפלה הטנזורית. נזכיר:
יהיו M,N מודולים מעל חוג R. נרצה לבנות מודול T מעל R יחד עם העתקה בילינארית $g:M\times N\to T$ כך שלכל מודול L מעל R והעתקה בילינארית $f:M\times N\to L$ קיים ויחיד הומומורפיזם יחיד $f':T\to L$ כך שמתקיים

$$f=f'\circ g$$

התבוננו במודול C, המודול החופשי שבסיסו $M\times N$. איברי C מסומנים בצורת סכומים סופיים:

$$\xi=\sum r_{\alpha}\left(u_{\alpha},v_{\alpha}\right)$$

כאשר $\alpha\in I$, $u_{\alpha}\in M,v_{\alpha}\in N$. ξ היא הפונקציה:

$$\begin{aligned}\xi\left(u_{\alpha},v_{\alpha}\right) &= r_{\alpha}\\ \xi\left(u,v\right) &= 0\end{aligned}$$

הגדרנו את D להיות תת המודול של C הנוצר על ידי אוסף האיברים הבאים:

$$\begin{gathered}\left(u+v,w\right)-\left(u,w\right)-\left(v,w\right)\\ \left(u,v+w\right)-\left(u,v\right)-\left(u,w\right)\\ \left(ru,v\right)-r\left(u,v\right)\\ \left(u,rv\right)-r\left(u,v\right)\end{gathered}$$

הגדרנו את $T=D/C$. כעת נמשיך בהוכחה.

הוכחה: נסמן עבור $u\in M,v\in N$:

$$\left(u,v\right)+D=u\otimes v$$

קוראים "u טנזור v". נגדיר

$$\begin{aligned} g : M \times N &\rightarrow T \\ g(u,v) &= u \otimes v \end{aligned}$$

מהגדרת D, g העתקה בילינארית.

כעת, יהי L מודול מעל R ותהי $f : M \times N \rightarrow L$ העתקה בילינארית מעל R. נוכל להרחיב את f להומומורפיזם $\overline{f} : C \rightarrow L$ לפי

$$\overline{f}\left(\sum r_\alpha (u_\alpha, v_\alpha)\right) = \sum r_\alpha f(u_\alpha, v_\alpha)$$

ברור כי $\overline{f}$ הומומורפיזם של מודולים מעל R. כיוון שלקחנו f בילינארית, ברור כי $\overline{f}(D) = 0$. לכן $\overline{f}$ מגדיר הומומורפיזם $f' : C/D = T \rightarrow L$ על ידי

$$f'((u,v) + D) = \overline{f}(u,v) = f(u,v)$$

אבל למעשה כתוב

$$\begin{aligned} f'(u \otimes v) &= f(u,v) \\ f' \circ g &= f \end{aligned}$$

נראה את יחידות T, g. נניח כי T', g' זוג נוסף שמקיים את התכונה. נציב $L = T', f = g'$. אז קיים הומומורפיזם יחיד $j : T \rightarrow T'$ כך שמתקיים

$$j \circ g = g'$$

באותה צורה, על ידי חילופי תפקידים בין T, T' ובין g, g', יש הומומורפיזם יחיד $j' : T' \rightarrow T$ כך שמתקיים

$$j' \circ g' = g$$

כעת נשים לב כי

$$(j' \circ j) \circ g = j' \circ g' = g$$

מהתכונה של T, g, מופעלת על עצמה, 1_T הוא ההומומורפיזם היחיד מתוך T אל T כך שמתקיים $1_T \circ g = g$, ולכן $j \circ j' = 1_T$. לכן j, j' הם איזומורפיזמים. ■

סימון המודול T מסומן $M \otimes_R N$, ונקרא המכפלה הטנזורית של המודולים M, N מעל R.

הערה 0.1 אם M נוצר על ידי $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$, N נוצר על ידי $\{u_\beta\}_{\beta\in J}$, אזי $M\otimes_R N$ נוצר על ידי $\{v_\alpha,u_\beta\}_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}$. בפרט, אם M,N נוצרים סופית מעל R, אזי $M\otimes_R N$ נוצר סופית מעל R.

הערה 0.2 ייתכן שיתקיים $M\neq 0, N\neq 0, M\otimes_R N=0$. לדוגמא, נסתכל על $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ונראה כי

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=0$$

מספיק להראות על יוצרים, שהם מהצורה

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right)\otimes\left(\frac{u}{v}+\mathbb{Z}\right) &= \left(\frac{va}{vb}+\mathbb{Z}\right)\otimes\left(\frac{u}{v}+\mathbb{Z}\right)=v\left(\frac{a}{bv}+\mathbb{Z}\right)\otimes\left(\frac{u}{v}+\mathbb{Z}\right)= \\ &= \left(\frac{a}{bv}+\mathbb{Z}\right)\otimes(u+\mathbb{Z})=\left(\frac{a}{bv}+\mathbb{Z}\right)\otimes 0=0\end{aligned}$$

הערה 0.3 יהיו $U\subseteq M, V\subseteq N$. אז אפשר להתבונן במודולים $M\otimes_R N, U\otimes_R V$. יש הומומורפיזם ברור

$$\begin{aligned}i:U\otimes_R V &\to M\otimes_R N\\ i(u\otimes v) &= u\otimes v\end{aligned}$$

ייתכן כי i אינו חד־חד־ערכי. הסיבה לכך היא שעשוי להתקיים

$$D_{U\times V}\subsetneq C_{U\times V}\cap D_{M\times N}$$

דוגמא פשוטה: $V=N=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z},$ $U=2\mathbb{Z}$.

$$i:2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

מתקיים

$$i(2\otimes 1)=2\otimes 1=2\cdot 1\otimes 1=2(1\otimes 1)=1\otimes 2\cdot 1=1\otimes 0=0$$

כעת נראה כי $0\neq 2\otimes 1\in 2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. נגדיר תבנית

$$\begin{aligned}f:2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\ f(2a,b) &= ab\end{aligned}$$

בפרט $f(2,1)=1$. יהי $f':2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ההומומורפיזם היחיד המקיים $f'(u\otimes v)=f(u,v)$. בפרט $f(2\otimes 1)=f(2,1)=1$, ולכן $2\otimes 1\neq 0$.

כמובן, אפשר לחזור על הבנייה גם להעתקות מולטילינאריות $f : M_1 \times \cdots \times M_K \to L$ שכולם מודולים מעל R, ולבנות את המכפלה הטנזורית

$$M_1 \otimes_R M_2 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k$$

כך שיש הומומורפיזם יחיד $f' : M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k \to L$ המקיים $f'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = f(v_1, \ldots, v_k)$. בשיעור הבא נראה כי מתקיים למשל

$$(M \otimes_R N) \otimes_R L \cong M \otimes_R (N \otimes_R L) \cong M \otimes_R N \otimes_R L$$
$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$$
$$R \otimes_R M \cong M$$