אלגברה ב3

ⓒ ארזים

14 בנובמבר 2016

1 המשך - מודולים

משפט 1.1 יהי M מודול נוצר סופית מעל R. יהי $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M)$ כך שקיים אידאל $I \subseteq R$ בעבורו $f(M) \subseteq IM$. אזי f מקיים משוואה פולינומיאלית מהצורה

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id_M} = 0$$

כאשר $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$.

הוכחה: נניח כי

$$M = \sum_{i=1}^{n} Rv_i$$

ונראה את

$$M^n = \bigoplus_{i=1}^{n} M$$

כמודול מעל $M_n(R[f])$. כעת נכתוב

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

כאשר $a_{ij} \in I$. לכן נקבל כי

$$\left(\begin{pmatrix} f & & \\ & \ddots & \\ & & f \end{pmatrix} - (a_{ij})_{i,j \leq n}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $A = (a_{i,j})$. נכפיל במטריצה $\mathrm{adj}(f \cdot I_n - A)$:

$$\det(fI_n - A) \cdot I_n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן לכל i מתקיים

$$\det\left(fI_n - A\right)\cdot v_i = 0$$

מתקיים למעשה

$$\begin{aligned}\det\left(fI_n - A\right) &\in \mathrm{Hom}_R\left(M, M\right)\\ \det\left(fI_n - A\right) &= f^n + \alpha_{n-1}f^{n-1} + \cdots + \alpha_1 f + a_0\end{aligned}$$

כאשר כמובן $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in I$. כעת, ההומומורפיזם הזה שולח כל אחד מהיוצרים v_i לאפס, ולכן זהו הומומורפיזם האפס, כנדרש. ■

מסקנה 1.2 יהי M מודול נוצר סופית מעל R, ויהי I אידאל כך שמתקיים $I \cdot M = M$. אזי

$$\left(1 + I\right) \cap \mathrm{Ann}_R\left(M\right) \neq \emptyset$$

הוכחה: ניקח את $f = \mathrm{Id}_M$. לפי הנתון, $f\left(M\right) = I \cdot M$. לכן יש $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$ עבורם

$$f^n - a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0$$

לכן לכל $v \in M$ מתקיים

$$\begin{aligned}v + a_{n-1}v + \cdots + a_1 v + a_0 v &= 0\\ \left(1 + a_{n-1} + \cdots + a_0\right)v &= 0\end{aligned}$$

הסכום הזה הוא כמובן איבר של $1 + I$ והוא מאפס את כל המודול, כנדרש. ■

מסקנה 1.3 (הלמה של נאקאיימה) יהי M מודול נוצר סופית מעל R, ויהי $I \subseteq J\left(R\right)$ אידאל. נניח כי $IM = M$. אזי $M = 0$.

הוכחה: מהמסקנה הקודמת, קיים $x \in I$ עבורו $\left(1 + x\right)M = 0$. $x \in J\left(R\right)$, ולכן $1 + x$ הוא איבר הפיך, ולכן $M = 0$. ■

מסקנה 1.4 יהי M מודול נוצר סופית מעל R. יהי N תת מודול של M, ויהי $I \subseteq J\left(R\right)$. נניח כי $M = IM + N$. אז $N = M$.

הוכחה: נתובנן במכפלה $I \cdot \left(M/N\right) = \left(IM + N\right)/N = M/N$. M/N כמובן נוצר סופית מעל R, ולכן מהלמה של נאקאיימה נקבל כי $M/N = 0$, כלומר $M = N$. ■

יהי R חוג מקומי בעל אידאל מקסימלי P. יהי M מודול נוצר סופית מעל R. נתבונן במודול $M/(PM)$ כמודול מעל $\mathbb{K}=R/P$ על ידי

$$(r+P)(v+PM)=rv+PM$$

לכן $M/(PM)$ הוא מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{K}$. כלומר, $M/(PM)$ הוא מרחב וקטורי סוף מימדי מעל $\mathbb{K}$.

כעת נלך בכיוון ההפוך. נניח כי $\overline{u_i}=u_i+PM$ הם בסיס של M/PM מעל $\mathbb{K}=R/P$. נרצה להראות שהקבוצה u_i יוצרת את M מעל R.

טענה 1.5

$$M=\sum_{i=1}^{n}Ru_i$$

הוכחה: נסמן

$$N=\sum_{i=1}^{n}Ru_i$$

ברור כי $N\subseteq M$. לכל $v\in M$ קיימים $r_1,\ldots,r_n\in R$ כך שמתקיים

$$v+PM=\sum_{i=1}^{n}(r_i+P)(u_i+PM)=\sum_{i=1}^{n}r_iu_i+PM$$

לכן נקבל כי

$$v\in N+PM$$

ובסך הכל $M=PM+N$. מהמסקנה האחרונה נסיק כי $M=N$. ■

2 סדרות מדוייקות והפונקטורים $\mathrm{Hom}_R(N,\cdot),\mathrm{Hom}_R(\cdot,N)$

הגדרה 2.1 <u>סדרה מדוייקת</u> של מודולים מעל R נתונה על ידי

$$\cdots\to M_{i-1}\xrightarrow{f_i}M_i\xrightarrow{f_{i+1}}M_{i+1}\xrightarrow{f_{i+2}}M_{i+2}\to\ldots$$

כאשר f_i הומומורפיזמים מעל R, וכן לכל R מתקיים

$$\mathrm{Im}f_i=\ker f_{i+1}$$

דוגמא

1. $M \xrightarrow{f} M' \to 0$ מדוייקת אם ורק אם f חד־חד־ערכית.

2. $0 \to M'' \xrightarrow{g} M$ מדוייקת אם ורק אם g על.

3. סדרה <u>קצרה</u> מדוייקת:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

זו סדרה מדוייקת אם ורק אם f חד־חד־ערכית, g על, וכן

$$\mathrm{Im} f = \ker g$$

כמובן, g מגדיר איזומורפיזם

$$\mathrm{Coker}\,(f) := M/f\,(M') \cong M''$$

טענה 2.2 נתונים מודולים M', M, M'' מעל R, והומומורפיזמים $f : M' \to M$, $g : M \to M''$.

1. הסדרה $0 \to M'' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M'$ מדוייקת אם ורק אם לכל מודול N הסדרה $0 \to \mathrm{Hom}_R\,(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom_R}\,(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R\,(M', N)$ מדוייקת.

2. הסדרה $M'' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M' \to 0$ מדוייקת אם ורק אם לכל מודול N הסדרה $0 \to \mathrm{Hom}_R\,(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom_R}\,(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R\,(N, M'')$ מדוייקת.

הוכחה: נראה את הסעיף הראשון, השני דומה ונשאר כתרגיל.
$\Leftarrow$: יהי N מודול. יש להראות ראשית כי g^* חד־חד־ערכית. נניח כי $\varphi \in \mathrm{Hom}_R\,(M'', N)$ כך שמתקיים $g^*\,(\varphi) = 0$. אם כן מתקיים $\varphi \circ g = 0$, כלומר $\varphi\,(g\,(M)) = 0$, אבל g על, ולכן $\varphi\,(M'') = 0$, כלומר $\varphi = 0$.
ראינו כי $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. כיוון שמתקיים $\ker g = \mathrm{Im} f$, $g \circ f = 0$, ולכן $f^* \circ g^* = 0^* = 0$. לכן בהכרח מתקיים $\mathrm{Im}\,(g^*) \subseteq \ker\,(f^*)$. להיפך, נניח כי $\xi \in \ker\,(f^*)$, $\xi \in \mathrm{Hom}_R\,(M, N)$. לכן נובע כי $\xi \circ f = 0$. לכן מתקיים $f\,(M') \subseteq \ker \xi$. כלומר, ξ מגדיר הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} : M/f\,(M') &\to N \\ \tilde{\xi}\,(m + f\,(M')) &= \xi\,(m) \end{aligned}$$

כזכור, g מגדיר איזומורפיזם

$$\begin{aligned} g' : M/f\,(M') &\to M'' \\ g'\,(m + f\,(M')) &= g\,(m) \end{aligned}$$

כעת נגדיר $\varphi\in\mathrm{Hom}_R\left(M'',N\right)$ על ידי

$$\varphi=\tilde{\xi}\circ\left(g'\right)^{-1}$$

נבדוק שמתקיים

$$\begin{aligned}g^*\left(\varphi\right) &= \xi\\ \varphi\circ g &= \xi\\ \tilde{\xi}\circ\left(g'\right)^{-1}\circ g &= \xi\end{aligned}$$

יהי $m\in M$, ונראה כי

$$\tilde{\xi}\left(g'^{-1}\left(g\left(m\right)\right)\right)=\tilde{\xi}\left(m+f\left(M'\right)\right)=\xi\left(m\right)$$

לכן $\xi\in\mathrm{Im}g^*$, כלומר $\ker f^*\subseteq\mathrm{Im}g^*$, וקיבלנו את השוויון, מה שאומר שהסדרה אכן מדוייקת.

$\Rightarrow$: נראה כי g על. נסמן

$$N=M''/g\left(M\right)$$

ויהי

$$\begin{aligned}\nu:M'' &\to N\\ \nu\left(m\right) &= m+N\end{aligned}$$

הומומורפיזם המנה. כמובן מתקיים

$$\nu\circ g=0=g^*\left(\nu\right)$$

g^* חד־חד־ערכית, ולכן בהכרח $\nu=0$, ואם הומומורפיזם המנה הוא 0, אזי המנה היא אפס ־ כלומר $M''=g\left(M\right)$, כלומר g על.

כעת מתקיים $f^*\circ g^*=0=\left(g\circ f\right)^*$, ולכן $\varphi\circ\left(g\circ f\right)=0$ לכל $\varphi:M''\to N$ הומומורפיזם מעם R. נבחר $N=M''$ וכן $\varphi=\mathrm{Id}_{M''}$. נקבל כי $g\circ f=0$, ולכן $\mathrm{Im}f\subseteq\ker g$.

לבסוף, נתבונן במודול $N=M/f\left(M'\right)$, ויהי $\nu:M\to N$ הומומורפיזם המנה. מתקיים

$$\begin{aligned}\nu\circ f &= 0\\ f^*\left(\nu\right) &= 0\\ \nu &\in \ker f^*=\mathrm{Im}g^*\\ \nu &= g^*\left(\varphi\right),\varphi:M''\to N\\ \nu &= \varphi\circ g\end{aligned}$$

אם $m \in \ker g$, אזי $m \in \ker \nu = f\left(M'\right)$, כלומר $\ker g \subseteq \mathrm{Im} f$, ובסך הכל קיבלנו את השוויון שרצינו, לכן הסדרה אכן מדוייקת. ■

3 מכפלה טנזורית של מודולים

נניח כי N, M, L מודולים מעל R, ונניח כי $f : M \times N \to L$ תבנית בילינארית מעל R. ממנה נייצר הומומורפיזם f' מעל R, אבל בשביל לעשות זאת נצטרך להגדיר מודול חדש, $M \otimes_R N$, ואז $f' : M \otimes_R N \to L$.

משפט 3.1 נתונים מודולים M, N מעל R, אזי קיימים מודול T מעל R והעתקה בילינארית $g : M \times N \to T$ כך שהתכונה הבאה מתקיימת:

לכל מודול L מעל R והעתקה בילינארית $f : M \times N \to L$ יש הומומורפיזם יחיד $f' : T \to L$ כך שמתקיים

$$f' \circ g = f$$

הזוג (T, g) נקבע ביחידות במובן הבא: אם יש זוג (T', g') עם אותה תכונה אזי יש איזומורפיזם יחיד $j : T \to T'$ כך שמתקיים $g' = j \circ g$.

במצב זה נאמר כי T היא <u>המכפלה הטנזורית</u> של M, N, ומסמנים $T = M \otimes_R N$.

הוכחה: קיום: יהי C המודול החופשי על הקבוצה $M \times N$: זאת קבוצת כל הפונקציות $f : M \times N \to R$, כך שמחוץ לקבוצה סופית של ערכים f מקבלת 0. נסמן $f = \sum_{i \in I} r_i \cdot \{m_i, n_i\}$, כאשר $|I| \in \mathbb{N}$, $\{m_i, n_i\}$ הם בדיוק הערכים עליהם הפונקציה לא מתאפסת, וכן $f\left(m_i, n_i\right) = r_i$.

נתבונן בתת המודול D הנוצר על ידי האיברים הבאים של C:

$$(u+v,w)-(u,w)-(v,w)\,,(u,v+w)-(u,v)-(u,w)\,,(ru,v)-r\,(u,v)\,,(u,rv)-r\,(u,v)$$

ונגדיר $T = C/D$. ■